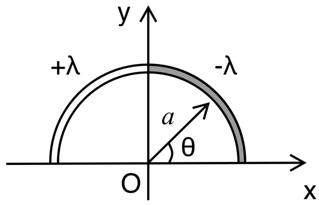
UNIVERSIDADE DE PERNAMBUCO
ESCOLA POLITÉCNICA DE PERNAMBUCO
Fundamentos do Eletromagnetismo
17 de outubro de 2019 – 2° Semestre 2019 – 1ª Prova

Nome:____

ATENÇÃO: Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

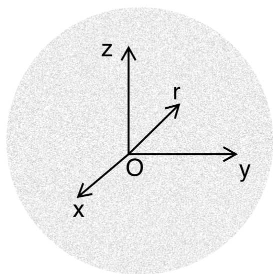
01. (3,0 pontos) A figura ilustra um pedaço de anel de raio a, centrado em O e de densidade linear de cargas uniforme

$$\lambda(\theta) = \begin{cases} -\lambda, & 0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}; \\ +\lambda, & \dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases}$$



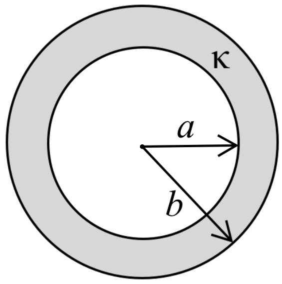
a) (1,0) calcule o potencial elétrico no centro O;
b) (1,0) determine o campo elétrico no ponto O;
c) (1,0) Se um dipolo elétrico $\vec{p} = -p\hat{x}$ for colocado no centro O, qual a energia potencial elétrica associada ao dipolo nesta configuração?

02. (2,0 pontos) Em uma dada região do espaço existe uma densidade volumétrica de cargas que varia com a distância radial na forma $\rho(r) = \alpha r^{-2} e^{-r/r_0}$, $0 \leq r < \infty$, onde α e r_0 são constantes positivas e r é a distância do centro do sistema de coordenadas até um ponto genérico do espaço.



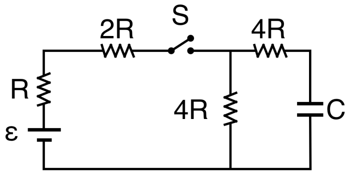
a) (1,0) Calcule a carga total disponível no espaço.
b) (1,0) Calcule o campo elétrico produzido por essa distribuição de cargas em um ponto genérico do espaço.

03. (3,0 pontos) A figura ilustra um capacitor esférico que é constituído de duas cascas metálicas e concêntricas. As cascas condutoras possuem raios a e b, e a região entre as placas está completamente preenchida de um material de constante dielétrica κ.



a) (1,0) Supondo que na casca condutora interna existe uma carga $+q$ e na externa uma carga $-q$, determine o campo elétrico na região entre as cascas.
b) (1,0) Calcule a diferença de potencial elétrico entre as cascas condutoras carregadas.
c) (1,0) Determine a capacitância do sistema.

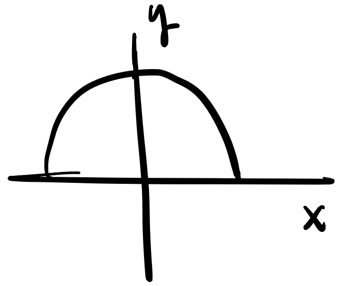
04. (2,0 pontos) Uma bateria de força eletromotriz ε é ligada a um capacitor de capacitância C, a uma chave S e a quatro resistores, conforme ilustra a figura. Com o capacitor completamente descarregado em t = 0, a chave S é fechada.



a) (1,0) Calcule a corrente que atravessa a bateria imediatamente após a chave S ser fechada.
b) (1,0) Calcule a corrente na bateria muito tempo após a chave S ser fechada.

Resolução

01. a)

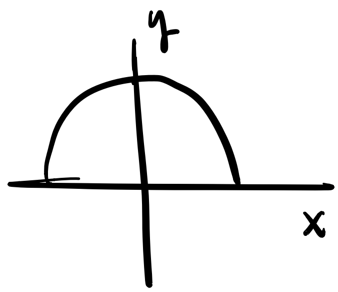


$$V_0 = V_+ + V_-$$

Por simetria, $V_+ = -V_-$

Logo, $\boxed{V_0 = 0}$

b)

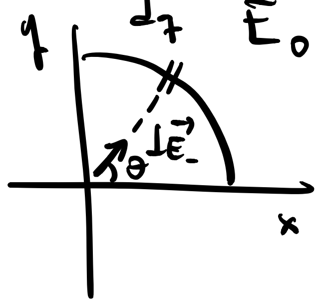


$$\vec{E}_0 = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$\vec{E}_- = \vec{E}_{-x} + \vec{E}_{-y}$$

$$\vec{E}_- = E_{-x}\hat{x} + E_{-y}\hat{y}$$

Por simetria, $\vec{E}_{+y} = \vec{E}_{-y}$ e $\vec{E}_{+x} = \vec{E}_{-x}$, logo



$$\vec{E}_0 = 2E_{-x}\hat{x}$$

$$\vec{E}_{-x} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta\,\hat{x}, \quad dq = \lambda\, dl$$

$$dl = a\,d\theta, \quad \vec{E}_{-x} = \lambda\int_0^{\pi/2} \frac{a\,d\theta\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{x}$$

$$\vec{E}_{-x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{\pi/2} \hat{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \hat{x}$$

$$\boxed{\vec{E}_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \hat{x}}$$

c) $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$, com $U = 0$ se $\vec{p} \perp \vec{E}$

$$U = + p\hat{x} \cdot \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \right) \hat{x} \Rightarrow \boxed{U = \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 a}}$$

---

02. a) $q = \int \rho \, d\tau = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \alpha e^{-r/r_0} r^{-2} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$

$$q = 4\pi\alpha \int_0^\infty e^{-r/r_0} dr = 4\pi\alpha \left(-r_0 e^{-r/r_0} \right) \Big|_0^\infty$$

$$q = 4\pi\alpha r_0 \left(e^0 - \underbrace{e^{-R/r_0}}_{0,\ R \to \infty} \right) \Rightarrow \boxed{q = 4\pi\alpha r_0}$$

b) Lei de Gauss: $$\oint_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int}/\epsilon_0$$

A distribuição de cargas tem simetria esférica, então

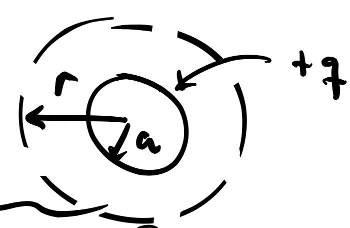
$$4\pi r^2 E = q_{int}/\epsilon_0 \, , \quad q_{int} = 4\pi\alpha \int_0^r e^{-r'/r_0}\, dr'$$

$$q_{int} = 4\pi\alpha r_0 \left(1-e^{-r/r_0}\right)$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\alpha r_0}{\epsilon_0 r^2}\left(1-e^{-r/r_0}\right)\hat{r}}$$

---

03. $$\epsilon_0 k \oint_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int,livre}$$



$$\epsilon_0 k E 4\pi r^2 = q$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 k r^2}\hat{r} \, , \quad a < r < b}$$

b) $\Delta V_{-+} = -\int_{-}^{+} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{b}^{a} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 k r^2}\, dr$

$$\Delta V_{-+} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 k}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{b}^{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 k}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

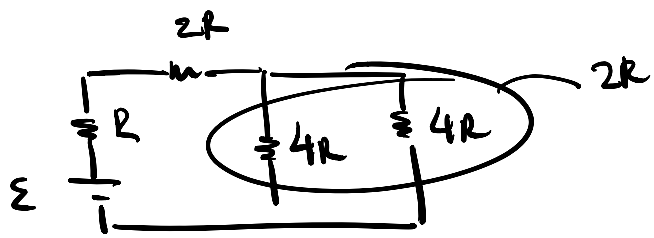
$$\boxed{\Delta V_{-+} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 k}\left(\frac{b-a}{ab}\right)}$$

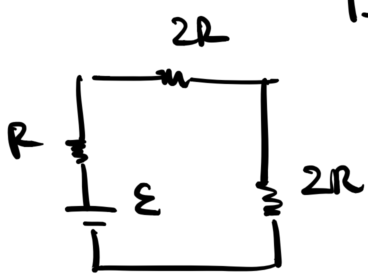
c) $q = CV,\quad V = \Delta V_{-+}$

$$C = q/V \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\epsilon_0 k\, ab}{b-a}}$$

---

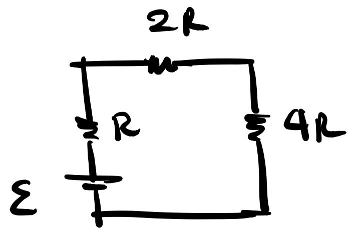
04. at $t = 0$





$$\boxed{i = \frac{\varepsilon}{5R}}$$

b) $t \to \infty \Rightarrow$ não haverá passagem de corrente no capacitor, logo



$$\boxed{i = \frac{\varepsilon}{7R}}$$