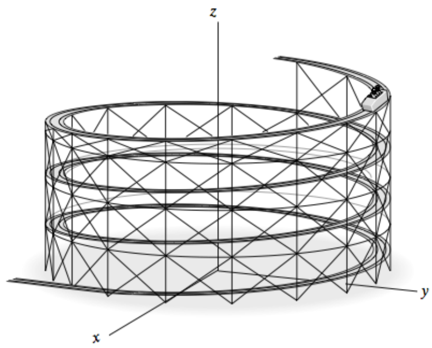
Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
04 de outubro de 2013
Mecânica 2 – Turma FG – 2° Semestre 2013 – 1ª Prova

Nome:____

ATENÇÃO:

Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI).

01. (4,0 pontos) Um carro de montanha-russa do parque de diversões "*Whispering Oaks Amusement Park*" se move ao longo de um caminho helicoidal cuja trajetória possui as equações:



$$trajetória \rightarrow \begin{cases} x(t) = Rcos\omega t \\ y(t) = Rsen\omega t \\ z(t) = H - \alpha t \end{cases}$$

Os parâmetros R, H, ω e α são constantes positivas. Determine em função do tempo:

a) (1,0) a velocidade do carro $\vec{v}(t)$ em coordenadas cartesianas;

c) (1,0) a aceleração do carro $\vec{a}(t)$ em coordenas cartesianas;

d) (1,0) os módulos da velocidade e da aceleração do carro.

d) (1,0) Obtenha as componentes da velocidade e da aceleração do carro em coordenadas cilíndricas.

02. (2,5) Um bloco de massa m está submetido a uma força cujo módulo varia no tempo na forma

$$F(t) = F_0 cos(\omega t + \varphi),$$

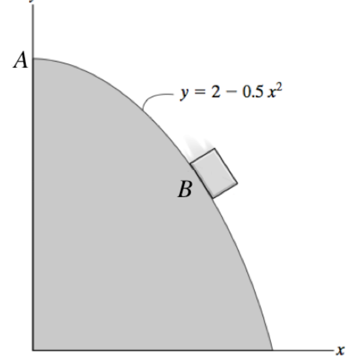
onde ω e φ são constantes positivas. A partícula possui velocidade nula em $t = 0$ e ela está confinada a se mover apenas no eixo x.

a) (1,0) Determine a aceleração e a velocidade da partícula em função do tempo.

b) (1,0) Obtenha a posição da partícula em função do tempo sabendo que em $t = 0$ a partícula possui posição $x_0 > 0$.

c) (0,5) Esboce o gráfico de $x(t)$ versus t para $\varphi = 0$.

03. (3,5 pontos) O bloco de massa $M = 5,0\ kg$ mostrado na figura pode se mover apenas no plano xy sobre o caminho parabólico de equação $y = 2 - 0,5x^2$. O bloco é abandonado do ponto A, de coordenadas $(0, 2)\ m$ e em seu movimento subsequente ele viaja até o ponto B, de coordenadas $(1, 3/2)\ m$. O trabalho da força de atrito no percurso AB tem módulo igual a $3,0\ joules$ e a gravidade local aponta verticalmente para baixo com módulo $g = 10\ m/s^2$. Sabendo que o coeficiente de atrito nas imediações do ponto B é igual $\mu = 5/39$, determine para o ponto B:



a) (1,0) o módulo velocidade do bloco;

b) (1,0) o raio de curvatura da trajetória;

c) (0,5) o diagrama de corpo isolado para o bloco;

d) (0,5) o módulo da reação normal sobre bloco;

e) (0,5) o módulo da aceleração tangencial do bloco;

Mecânica 2 - 2013.2

Turma FG - 1ª Prova

Resolução

#01. a) $\vec{v} = \hat{x}\dfrac{dx}{dt} + \hat{y}\dfrac{dy}{dt} + \hat{z}\dfrac{dz}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = -R\omega \operatorname{sen}\omega t$$

$$\frac{dy}{dt} = R\omega \cos\omega t$$

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = (-R\omega \operatorname{sen}\omega t)\,\hat{x} + (R\omega\cos\omega t)\,\hat{y} - \alpha\,\hat{z}}$$

b) $\vec{a}(t) = \hat{x}\dfrac{d^2x}{dt^2} + \hat{y}\dfrac{d^2y}{dt^2} + \hat{z}\dfrac{d^2z}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2\cos\omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R\omega^2 \operatorname{sen}\omega t$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

02

$$\boxed{\vec{a}(t) = (-R\omega^2 \cos\omega t)\,\hat{x} + (-R\omega^2 \operatorname{sen}\omega t)\,\hat{y}}$$

c) $|v(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$= \sqrt{(-R\omega \operatorname{sen}\omega t)^2 + (R\omega^2 \cos\omega t)^2 + (-\alpha)^2}$

$= \sqrt{R^2\omega^2 (\operatorname{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t) + \alpha^2}$

$\Rightarrow \boxed{|\vec{v}(t)| = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2}}$

$|\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$= \sqrt{(-R\omega^2 \cos\omega t)^2 + (-R\omega^2 \operatorname{sen}\omega t)^2}$

$= \sqrt{R^2\omega^4 (\cos^2\omega t + \operatorname{sen}^2\omega t)}$

$= \omega^2 R \Rightarrow \boxed{|\vec{a}(t)| = \omega^2 R}$

d) $v_r = 0$, pois o raio não varia.

$v_\theta = \omega R$, pois a partícula gira.

$v_z = -\alpha$, pois $z(t)$ é um movimento uniforme para baixo.

$a_r = -\omega^2 R$, pois a partícula gira

$a_\theta = 0$, pois a velocidade angular é constante.

$a_z = 0$, por não existir aceleração na direção z.

#02. a) $F(t) = F_R = ma$

$$a = \frac{F(t)}{m} \Rightarrow \boxed{a(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t) \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv'(t) = \int_0^t a(t')\,dt'$$

$$v(t) - \cancelto{0}{v_0} = \frac{F_0}{m}\int_0^t \cos(\omega t' + \varphi)\,dt'$$

$$v(t) = \frac{F_0}{m}\left[+\frac{\operatorname{sen}(\omega t' + \varphi)}{\omega}\right]\Bigg|_0^t$$

$$\boxed{v(t) = \frac{F_0}{m\omega}\left[\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - \operatorname{sen}\varphi\right]}$$

04

b) $\dfrac{dx(t)}{dt} = v(t) \implies dx(t) = v(t)\,dt$

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v(t')\,dt'$$

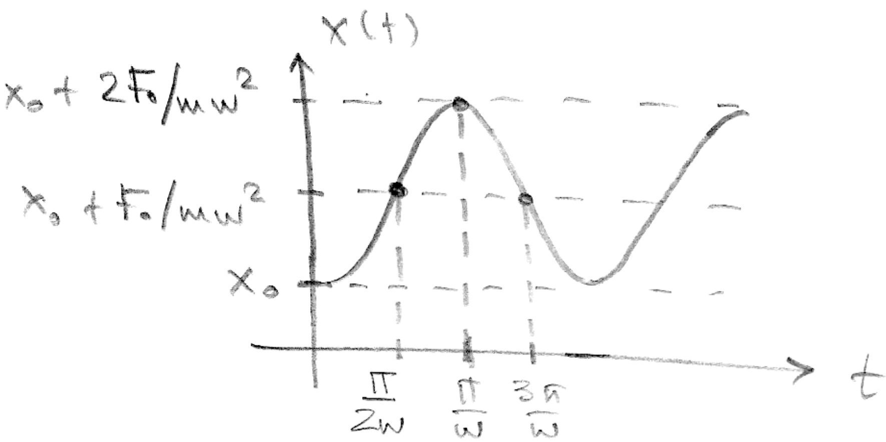
$$x(t) = x_0 + \frac{F_0}{m\omega}\int_0^t [-\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}(\omega t' + \varphi)]\,dt'$$

$$x(t) = x_0 - \left(\frac{F_0}{m\omega}\operatorname{sen}\varphi\right)t - \frac{F_0}{m\omega^2}\cos(\omega t' + \varphi)\Big|_0^t$$

$$\boxed{x(t) = x_0 - \left(\frac{F_0}{m\omega}\operatorname{sen}\varphi\right)t - \frac{F_0}{m\omega^2}[\cos(\omega t + \varphi) - \cos\varphi]}$$

c) $\varphi = 0 \implies x(t) = x_0 - \dfrac{F_0}{m\omega^2}[\cos(\omega t) - 1]$

$$x(t) = x_0 + \left[\frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)\right]$$



$\cos\omega t = 0$ (1° vez)

$\implies \omega t = \pi/2$

$\cos\omega t = -1$ (1° vez)

$\implies \omega t = \pi$

#03. a) $\Delta E_{mec} = W_{externo}$

$$\Delta E_{mec} = W_{fat}$$

$$\Delta K + \Delta U = K_B - \cancel{K_A}^{0} + U_B - U_A = W_{fat}$$

$$K_B = W_{fat} - U_B + U_A$$

$$\frac{Mv_B^2}{2} = W_{fat} - Mgy_B + Mgy_A$$

$$\frac{Mv_B^2}{2} = W_{fat} - Mg(y_B - y_A)$$

$$v_B^2 = \frac{2W_{fat}}{M} - 2g(y_B - y_A)$$

$$y_A = 2m, \; y_B = 1{,}5m \Rightarrow y_B - y_A = -0{,}5$$

$$v_B^2 = \frac{2.(-3)}{5} + 20.0{,}5$$

$$v_B^2 = 10 - \frac{6}{5} = \frac{50-6}{5} = 44/5$$

$$\boxed{v_B = 2\sqrt{\frac{11}{5}} \; m/s}$$

b) $$\rho(x) = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

$\rightarrow$

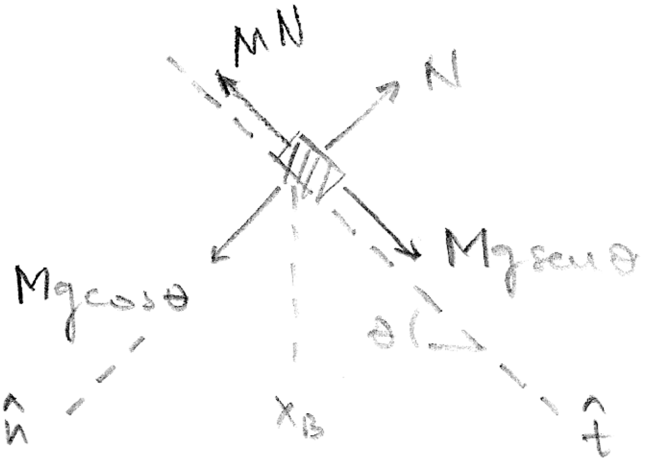
$$\frac{dy}{dx} = -x \ , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -1$$

$$\rho(x) = \frac{[1+x^2]^{3/2}}{|-1|} = (1+x^2)^{3/2}$$

$$\rho(x_B = 1{,}0\,m) = (1+1)^{3/2} = 2\sqrt{2}\,m$$

$$\boxed{\rho_B = 2\sqrt{2}\,m}$$

c)



$$\tan\theta = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_B} = -1$$

$$\Rightarrow \theta = 45°$$

d) $\hat{n}: \ Mg\cos\theta - N = F_n = M\frac{v_B^2}{\rho_B}$

$$N = Mg\cos\theta - M\frac{v_B^2}{\rho_B}$$

$$N = 50\cos 45° - 5\left(\frac{44}{5}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$N = 25\sqrt{2} - \frac{22\sqrt{2}}{2} = (100 - 11)\sqrt{2}$$

$$\boxed{N = 89\sqrt{2}\ N}$$

e) $\hat{t}$: $Mg\,sen\theta - f_{at} = Ma_t$

$$Mg\,sen\theta - \mu N = Ma_t$$

$$a_t = g\,sen\theta - \frac{\mu N}{M}$$

$$a_t = 10\,sen45^\circ - \frac{\cancel{2}}{\cancel{89}} \cdot \frac{\cancel{89}\sqrt{2}}{\cancel{5}}$$

$$a_t = 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$\boxed{a_t = 4\sqrt{2}\ m/s^2}$$