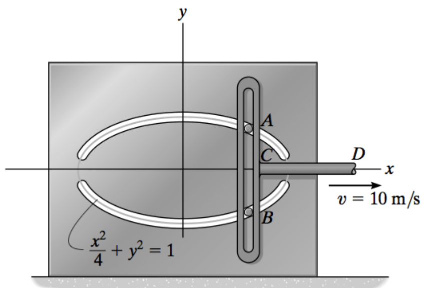
Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
30 de abril de 2014
Mecânica 2 - 1° Semestre 2014 – 1ª Prova

Nome:____

ATENÇÃO:
Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI).
Nos problemas de resolução numérica considere g = 10 m/s^2.

01. (3,0 pontos) As cavilhas A e B da figura ao lado se movem ao longo de um caminho elíptico quando o braço CD, conectado a um suporte, é puxado para direita com velocidade de $10\ m/s$. O caminho elíptico possui equação dada pela relação

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

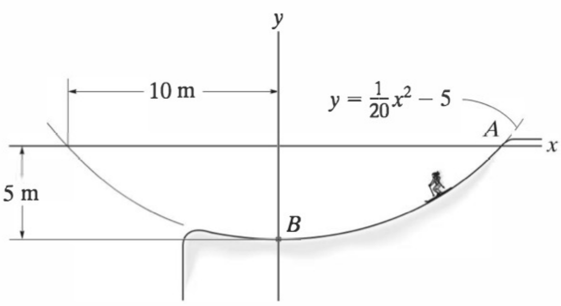


Determine para $x = 1\ m$:

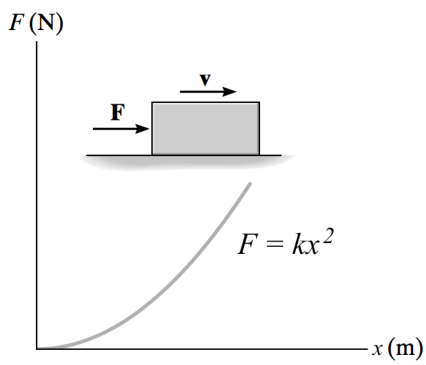
a) (1,0) a velocidade da cavilha A;
b) (1,0) o módulo da velocidade da cavilha B;
b) (1,0) o módulo da aceleração da cavilha A;

02. (3,5 pontos) Um esquiador desliza sem atrito ao longo da trajetória mostrada na figura, de equação $y = x^2/20 - 5$. Ele possui uma massa $m\ =\ 52\ kg$ e parte do repouso no ponto A, de coordenada vertical $y_A = 5\ m$. Considere que a aceleração da gravidade local vale $g = 10\ m/s^2$ e aponta verticalmente para baixo. Determine:

a) (1,0) o trabalho da força gravitacional entre os pontos A e B da trajetória;
b) (1,0) o módulo da velocidade do esquiador no ponto B;
c) (1,0) o módulo da força normal sobre o esquiador no ponto B da trajetória.
d) (0,5) De qual altura o esquiador deveria começar seu movimento para que a força normal sobre o esquiador no ponto B tivesse uma intensidade de 9 vezes o seu peso?



03. (3,5 pontos) A força horizontal $\vec{F}$, que age sobre um bloco de massa m, tem sua intensidade variada conforme a equação $F = kx^2$, onde k é uma constante positiva (veja a figura). O sistema está sob ação da aceleração da gravidade local que vale g e aponta verticalmente para baixo. Sabendo que o bloco possui velocidade $v_0 \neq 0$ em $x_0 = 0$ e que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície horizontal é igual a μ, responda os itens a seguir.



a) (1,0) Esboce as forças que atuam sobre o bloco a partir de um diagrama de corpo isolado e escreva as equações de movimento do bloco utilizando a Segunda Lei de Newton.
b) (1,0) Escreva uma relação para a aceleração do bloco em função de x.
c) (1,0) Determine a velocidade do bloco em função de x.
d) (0,5) Calcule a potência associada à força $\vec{F}$ para uma posição x genérica.

Mecânica 2 - Turma FN

1ª Prova - 2014.1

#01. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

1) $\vec{V}_A(x=1) = \dot{x}_A \hat{x} + \dot{y}_A \hat{y}$, $x = 1m$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = 0 \Rightarrow \frac{2x\dot{x}}{4} + 2y\dot{y} = 0$$

$$x\frac{\dot{x}}{2} + 2y\dot{y} = 0 \Rightarrow x_A\frac{\dot{x}_A}{2} + 2y_A\dot{y}_A = 0$$

E ainda, $\frac{x_A^2}{4} + y_A^2 = 1 \Rightarrow \frac{1^2}{4} + y_A^2 = 1$

$$y_A^2 = 1 - 1/4 = \frac{3}{4} \Rightarrow y_A = \sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $x_A\frac{\dot{x}_A}{2} + 2y_A\dot{y}_A = 0$, $\dot{x}_A = 10\,m/s$

$$1 \cdot \frac{10}{2} + \cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\dot{y}_A = 0$$

$$\dot{y}_A = -5/\sqrt{3}$$

⟶

02

$$\boxed{\vec{v}_A = \left(10\,\hat{x} - \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\hat{y}\right) m/s}$$

b) $\vec{v}_B = \dot{x}_B\,\hat{x} + \dot{y}_B\,\hat{y}$

B sobe enquanto A desce.

Mas $\dot{x}_B = \dot{x}_A = 10\, m/s$ e $\dot{y}_B = -\dot{y}_A$, logo

$$\vec{v}_B = \left(10\,\hat{x} + \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\hat{y}\right) m/s$$

$$v_B = \sqrt{10^2 + \frac{25}{3}} = \sqrt{325/3} = 5\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$$\boxed{v_B = 5\sqrt{13/3}\ m/s}$$

c) $\vec{a}_A = \dfrac{d\vec{v}_A}{dt} = \ddot{x}_A\,\hat{x} + \ddot{y}_A\,\hat{y}$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{x_A \dot{x}_A}{2} + 2y_A\dot{y}_A\right) = 0$$

$$\frac{\dot{x}_A^2}{2} + \cancel{\frac{x_A \ddot{x}_A}{2}} + 2\dot{y}_A^2 + 2y_A\ddot{y}_A = 0$$

0, $\dot{x}_A = cte$

$$\frac{\dot{x}_A^2}{2} + 2\dot{y}_A^2 + 2y_A\ddot{y}_A = 0$$

$$\frac{10^2}{2} + 2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{y}_A = 0$$

$$50 + 50/3 + \sqrt{3}\,\ddot{y}_A = 0 \Rightarrow \frac{200}{3} + \sqrt{3}\,\ddot{y}_A = 0$$

$$\ddot{y}_A = -\frac{200}{3\sqrt{3}} = -\frac{200\sqrt{3}}{9}$$

$$\vec{a}_A = \cancel{\ddot{x}_A}^{\,0}\,\hat{x} + \ddot{y}_A\,\hat{y} \Rightarrow \boxed{a_A = \frac{200\sqrt{3}}{9}\,m/s^2}$$

#02. a) $W_{gAB} = -mg(y_B - y_A)$

$$y_B = 0,\ y_A = 5m$$

$$W_{gAB} = -520\,(0-5) = 2600\,J$$

$$\boxed{W_{gAB} = 2600\,J}$$

04

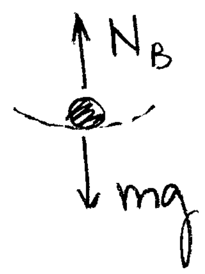
b) $\Delta K = W_g$

$$K_B - K_A = W_{g_{AB}}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} - \cancelto{0}{\frac{mv_A^2}{2}} = 2600 J$$

$$26\, v_B^2 = 2600 \Rightarrow \boxed{v_B = 10\ m/s}$$

c) $$N_B - mg = \frac{m v_B^2}{\rho_B}$$



$$N_B = mg + \frac{m v_B^2}{\rho_B}, \quad \rho_B = ?$$

$$\rho_B = \frac{\left[1 + \left(dy/dx\,|_{x_B}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x_B}\right|}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{10}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 1/10$$

$$\rho_B = \frac{[1+0]^{3/2}}{1/10} \Rightarrow \rho_B = 10 m$$

$$\therefore\ N_B = 520 + 52\frac{(10)^2}{10} \Rightarrow \boxed{N_B = 1040 N}$$

d) $N_B = mg + m\frac{v_B^2}{\rho_B} = 9mg$

$$\frac{\cancel{m} v_B^2}{\rho_B} = 8\cancel{m}g \Rightarrow v_B^2 = 8g\rho_B$$

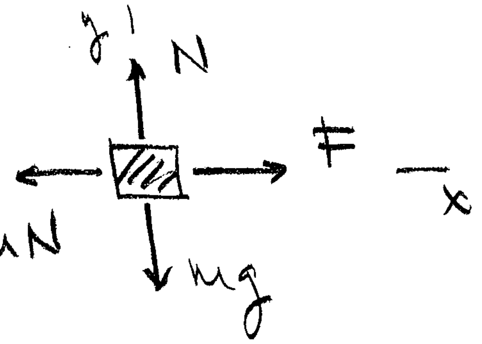
$$K_B + mgy_B = \underbrace{\cancel{K_A}}_{0} + mgy'_A$$

$$\frac{\cancel{m}\,8\cancel{g}\rho_B}{2} + 0 = \cancel{m}\cancel{g}y'_A \Rightarrow y'_A = 4\rho_B$$

$$\boxed{y'_A = 40\,m}$$

#03. $F = kx^2$

a)



x: $F - \mu N = ma$

y: $N - mg = 0$

b) $F - \mu mg = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} - \mu g$

$$\boxed{\vec{a} = \hat{x}\left(\frac{kx^2}{m} - \mu g\right)}$$

c) $a = v\dfrac{dv}{dx} \Rightarrow \dfrac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} a\,dx$

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_0^x \left(\frac{kx^2}{m} - \mu g\right) dx$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{3}\frac{kx^3}{m} - \mu g x$$

$$\boxed{\vec{v} = \hat{x}\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{kx^2}{m} - \mu g x\right)}}$$

d) $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, $\vec{F} \parallel \hat{x}$, $\vec{v} \parallel \hat{x}$

$\therefore$ $P = Fv$

$$\boxed{P = kx^2\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{kx^2}{m} - \mu g x\right)}}$$