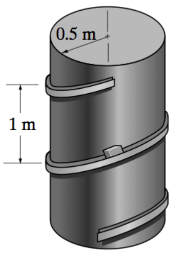
Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
05 de julho de 2013
Mecânica 2 - 1° Semestre 2013 – 2ª Chamada

Nome:____

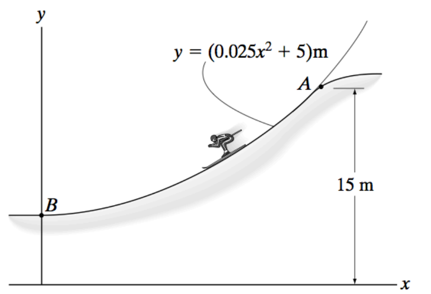
ATENÇÃO: Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI). Considere g = 10 m/s^2.



01. (2,0 pontos) Uma caixa desliza sem atrito ao longo de uma trajetória helicoidal descrita pelas equações: $r(t) = 0{,}5\,m$, $\theta(t) = (2{,}0\,t^2)rad$ e $z(t) = (2{,}0 - 0{,}5t^2)\,m$, onde t está em segundos. Determine:

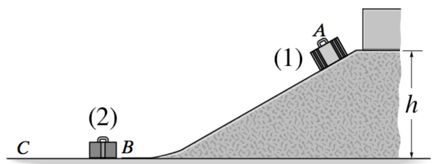
a) (1,0) a velocidade e a aceleração da caixa para um instante genérico de tempo t;
b) (1,0) os módulos da velocidade e da aceleração para $t = 2\pi$.

Dados: $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_z\hat{z}, a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2, a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta},\ a_z = \ddot{z}$



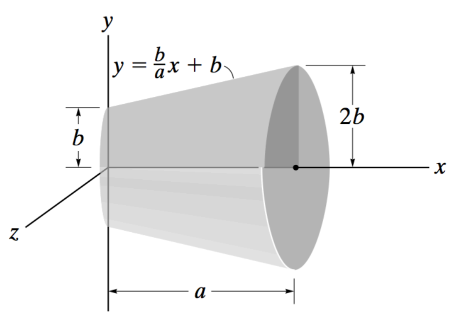
02. (3,0 pontos) Um esquiador de massa $m = 60\ kg$ desliza ao longo de uma trajetória de curva igual a $y(x) = (0{,}025x^2 + 5)\ m$. Ele passa pelo ponto A com uma velocidade de módulo $v_A = 5{,}0\ m/s$ e segue em direção ao ponto B. Veja a figura. Despreze os efeitos do atrito e as dimensões do esquiador. Determine para o ponto B:

a) (0,5) as coordenadas do ponto B, ou seja, (x_B, y_B);
b) (1,0) o raio de curvatura da trajetória, ρ_B;
c) (1,0) o módulo da velocidade do esquiador, v_B;
d) (0,5) o módulo da reação normal sobre o esquiador, N_B.



03. (2,0 pontos) Na figura ao lado, a mala de número (1) é abandonada do ponto A, localizado a uma altura h em relação ao solo. Ao chegar no ponto B, ela colide elasticamente com a mala de número (2). O coeficiente de atrito cinétrico no trajeto BC é igual a μ. As malas possuem a mesma massa m. Determine:

a) (1,0) as velocidades das malas (1) e (2) imediatamente após a colisão;
b) (1,0) a distância máxima percorrida pela mala (2) no trecho BC até que ela atinja o repouso.



04. (3,0 pontos) A seção de cone da figura é formado pelo sólido de revolução completa da curva $y = bx/a + b$ em torno do eixo x. Suponha que este sólido possui uma densidade volumétrica de massa constante e igual a ρ.

a) (1,0) Calcule a massa total deste corpo.
b) (1,0) Obtenha o momento de inércia do objeto em torno do eixo x em função de sua massa.
c) (1,0) Determine a energia cinética de rotação quando o cone gira em torno do eixo x com uma velocidade angular igual a ω_0.

Mecânica 2 - 2ª Chamada

2013.1

Resolução

#01. $r(t) = 0{,}5\,m$

$\theta(t) = 2t^2 \ rad$

$z(t) = (2 - 0{,}5t^2)\,m$

1) $\vec{v}(t) = v_r(t)\hat{r} + v_\theta(t)\hat{\theta} + v_z(t)\hat{z}$

$v_r = \dot{r} = 0$

$v_\theta = r\dot{\theta} = 0{,}5 \cdot 4t = 2t.$

$v_z = \dot{z} = -t$

$\vec{v}(t) = 2t\hat{\theta} - t\hat{z} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = t(2\hat{\theta} - \hat{z})}$

$\vec{a}(t) = a_r(t)\hat{r} + a_\theta(t)\hat{\theta} + a_z(t)\hat{z}$

$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = -0{,}5(4t)^2 = -8t^2.$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2 + 2.0.4t = 2$

$a_z = \ddot{z} = -1$

$$\boxed{\vec{a}(t) = (-8t^2\hat{r} + 2\hat{\theta} - \hat{z})}$$

02

b) $\vec{v}(2\pi) = 2\pi(2\hat{\theta} - \hat{z})$

$= 4\pi\hat{\theta} - 2\pi\hat{z}$

$|\vec{v}(2\pi)| = \sqrt{(4\pi)^2 + (-2\pi)^2}$

$= \sqrt{16\pi^2 + 4\pi^2} = \pi\sqrt{20}$

$\Rightarrow \boxed{|\vec{v}(2\pi)| = 2\pi\sqrt{5} \text{ m/s}}$

$\vec{a}(2\pi) = -8(2\pi)^2\hat{r} + 2\hat{\theta} - \hat{z}$

$= -32\pi^2\hat{r} + 2\hat{\theta} - \hat{z}$

$|\vec{a}(2\pi)| = \sqrt{(-32\pi^2)^2 + (2)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{1024\pi^4 + 4 + 1} = \sqrt{1024\pi^4 + 5}$

$\boxed{|\vec{a}(2\pi)| = \sqrt{1024\pi^4 + 5}}$

#02. a) $x_B = 0$, $y(x) = (0{,}025x^2 + 5)m$

$y(x_B = 0) = 5m \Rightarrow \boxed{(x_B, y_B) = (0,5)\,m}$

b) $\rho(x) = \dfrac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$

$y(x) = 0{,}025x^2 + 5$

$\dfrac{dy}{dx} = 0{,}05x$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0{,}05$

$\rho(x) = \dfrac{[1 + (0{,}05x)^2]^{3/2}}{0{,}05}$

$\rho(x_B) = \dfrac{[1 + (0{,}05x_B)^2]^{3/2}}{0{,}05} = \dfrac{1}{0{,}05}$, $x_B = 0.$

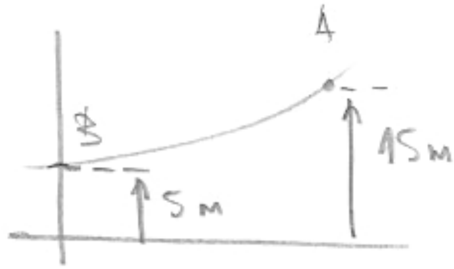
$\rho(0) = \dfrac{1}{5 \cdot 10^{-2}} = 0{,}2 \cdot 10^2$

$\boxed{\rho(0) = 20\,m}$

04

c) $\Delta K_{AB} + \Delta U_{gAB} = 0$

$$K_B - K_A + U_{gB} - U_{gA} = 0$$



$$K_B + U_{gB} = K_A + U_{gA}$$

$$\frac{\cancel{m} v_B^2}{2} + \cancel{m} g y_B = \frac{\cancel{m} v_A^2}{2} + \cancel{m} g y_A$$

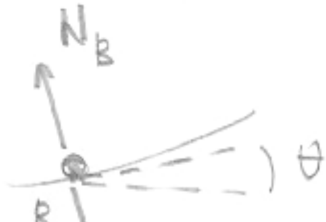
$$v_B^2 = v_A^2 + 2g(y_A - y_B)$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g(y_A - y_B)} \quad , \quad v_A = 5 m/s$$

$$v_B = \sqrt{25 + 2 \cdot 10 (15 - 10)}$$

$$v_B = \sqrt{225} \Rightarrow \boxed{v_B = 15 m/s}$$

d)



$$\tan\theta_B = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_B} = 0{,}05\, x_B = 0$$

$$N_B - mg\cos\theta = \frac{m v_B^2}{\rho_B}$$

$$N_B - mg = \frac{m v_B^2}{\rho_B} \Rightarrow N_B = mg + \frac{m v_B^2}{\rho_B}$$

$\rightarrow$

$$N_B = 60 \cdot 10 + \overset{3}{\cancel{60}} \cdot \frac{15^2}{\cancel{20}} = 600 + 3 \cdot 225$$

$$\boxed{N_B = 1275\,N}$$

#03. a) Antes da colisão:

$$\Delta K_1 + \Delta U_1 = 0$$

$$\frac{\cancel{m} v_{1B}^2}{2} + 0 = \frac{\cancel{m} v_{1A}^2}{2} + \cancel{m} g h$$

$$v_{1B}^2 = v_{1A}^2 + 2gh, \quad v_{1A} = 0.$$

$$v_{1B} = \sqrt{2gh}$$

Imediatamente antes: $v_1 = \sqrt{2gh}$

$$v_2 = 0$$

Conservação de momento linear: $\underbrace{mv_1 + mv_2}_{\text{ANTES}} = \underbrace{mv_1' + mv_2'}_{\text{DEPOIS}}$

$$v_1 + \cancelto{0}{v_2} = v_1' + v_2' \Rightarrow \boxed{v_1 - v_1' = v_2'} \quad (I)$$

06

Colisão elástica: $K_{ANTES} = K_{DEPOIS}$

$$K = K'$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + \cancel{\frac{mv_2^2}{2}} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2}$$

0

$$v_1^2 - v_1'^2 = v_2'^2$$

$$(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = v_2'^2 \quad (II)$$

$(II) \div (I)$: $v_1 + v_1' = v_2'$ (III)

$v_1 - v_1' = v_2'$ (I) $\downarrow \oplus$

$$2v_1 = 2v_2' \Rightarrow v_2' = v_1 = \sqrt{2gh}$$

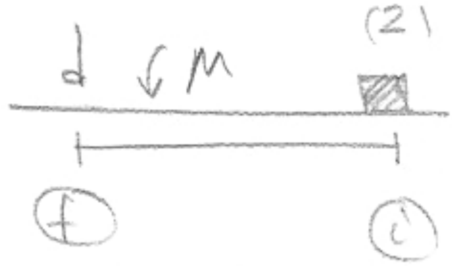
$$\boxed{v_2' = \sqrt{2gh}}$$

(I) $v_1 - v_1' = v_2' \Rightarrow v_1' = v_1 - v_2 = 0$

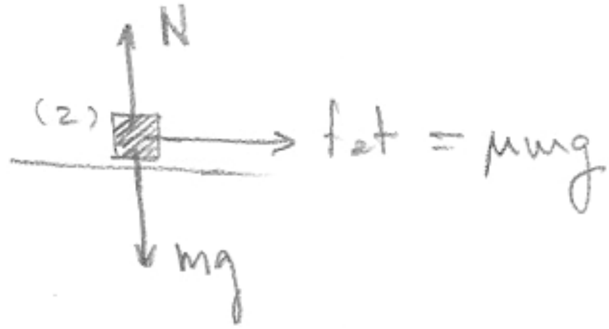
$$\boxed{v_1' = 0}$$

b) Teorema trabalho - Energia Cinética:

$$\Delta K = W_{fat}$$



$$\underbrace{K_f}_{0} - K_i = W_{fat}$$



$$-K_i = -\mu m g d$$

$$\frac{\cancel{m} v_2'^2}{2} = \mu \cancel{m} g d$$

$$d = \frac{v_2'^2}{2\mu g} \Rightarrow d = \frac{\cancel{2}\cancel{g}h}{\cancel{2}\mu\cancel{g}}$$

$$\boxed{d = \frac{h}{\mu}}$$

#04. a) $m = \int \rho \, dV$

$dV = ?$

$$dV = \pi y^2 dx$$

08

$$m = \int \rho \pi y^2 \, dx \quad , \quad y(x) = \frac{b}{a} x + b$$

$$m = \rho \pi \int_0^a \left(\frac{b}{a} x + b \right)^2 dx$$

$$m = \rho \pi \int_0^a \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 x^2 + 2 \frac{b^2}{a} x + b^2 \right] dx$$

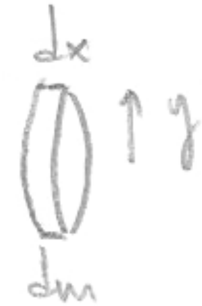
$$m = \pi \rho \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{x^3}{3} + \frac{\cancel{2} b^2}{a} \frac{x^2}{\cancel{2}} + b^2 x \right] \Bigg|_{x=0}^{x=a}$$

$$m = \pi \rho \left[\left(\frac{b}{\cancel{a}} \right)^2 \frac{a^{\cancel{3}}}{3} + \frac{b^2}{\cancel{a}} a^{\cancel{2}} + b^2 a \right]$$

$$m = \pi \rho \left(\frac{b^2 a}{3} + 2 b^2 a \right) = \pi \rho b^2 a \left(\frac{1}{3} + 2 \right)$$

$$\boxed{m = \frac{7}{3} \rho \pi a b^2}$$

b) $I_x = \int dI_x \quad , \quad dI_x = \frac{1}{2} dm \, y^2$



$$I_x = \int \frac{1}{2} dm\, y^2 = \frac{1}{2} \int \rho\, dv\, y^2$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_0^a \pi y^4 dx = \frac{\rho\pi}{2} \int_0^a \underbrace{\left(\frac{b}{a}x + b \right)}_{u}^4 dx$$

$$\int_{u_i}^{u_f} u^4 dx \,, \quad u = \frac{b}{a}x + b$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow dx = \frac{a}{b} du$$

$$\int_{u_i}^{u_f} u^4 dx = \int_{u_i}^{u_f} u^4 \frac{a}{b} du = \frac{a}{b} \frac{u^5}{5} \Big|_{u_i}^{u_f}$$

$$= \frac{a}{5b} \left(\frac{b}{a}x + b \right)^5 \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{a}{5b} \left[\left(\frac{b}{a}a + b \right)^5 - \left(\frac{b}{a}.0 + b \right)^5 \right]$$

$$= \frac{a}{5b} \left[(2b)^5 - b^5 \right] = \frac{a}{5b} (32b^5 - b^5) = \frac{31\, a b^5}{5b}$$

$$I_x = \frac{\rho\pi}{2} \cdot \frac{31\, ab^4}{5} \Rightarrow I_x = \frac{31}{10} \rho \pi a b^4$$

$\longrightarrow$

$$\frac{I_x}{m} = \frac{\frac{81}{10}\,\cancel{\rho}\cancel{\pi}\cancel{\alpha}\,b^4}{\frac{7}{3}\,\cancel{\rho}\cancel{\pi}\cancel{\alpha}\,b^2} = \frac{93}{70}\,b^2$$

$$\boxed{I_x = \frac{93}{70}\,m\,b^2}$$

c) $$K = \frac{I_x\,\omega^2}{2}$$

$$\boxed{K = \frac{93}{140}\,m\,b^2\omega^2}$$