Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
04 de dezembro de 2013
Mecânica 2 - 2° Semestre 2013 – 2ª Chamada

Nome:____

ATENÇÃO:

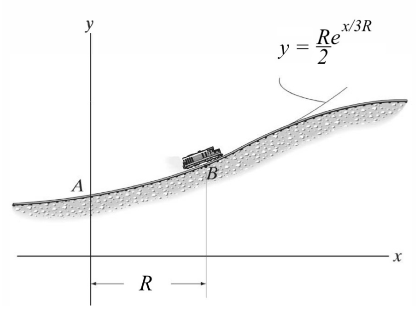
Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI).

Nos problemas de resolução numérica considere g = 10 m/s^2.

01. (3,0 pontos) A posição de uma caixa de massa $m = 1{,}0\ kg$ que desce uma espiral é descrita pela equação $\vec{r}(t) = [2sen(2t)\hat{x} + 2cos(t)\hat{y} - 2t^2\hat{z}]$, onde t está em segundos. Determine:

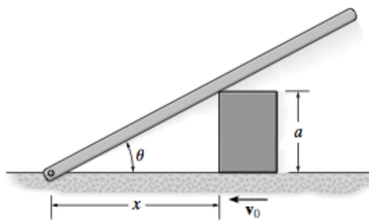
a) (1,0) as funções temporais da velocidade $\vec{v}(t)$ e da aceleração $\vec{a}(t)$ da caixa;
b) (1,0) o momento angular da caixa para $t = 1s$;
c) (1,0) a variação de momento linear da caixa entre os instantes 0 e 1 segundos.

02. (3,0 pontos) Ao passar pelo ponto A, da esquerda para a direita, o trem da figura possui velocidade de módulo v_0 e uma aceleração tangencial de módulo a_t, constante, que é contrária ao movimento do trem. Sabendo que o arco AB possui um comprimento igual a αR, onde α é um número positivo e que o trem possui massa M, determine quando o trem passa pelo ponto B:

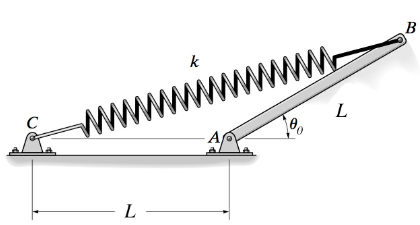


a) (1,0) o módulo de sua velocidade;
b) (1,0) o raio de curvatura da trajetória, ρ_B;
c) (0,5) o módulo de sua aceleração;
d) (0,5) o módulo da força normal sobre o trem.

03. (2,0 pontos) Um bloco se move para a direita com uma velocidade $\vec{v}_0$ constante. Determine em função de a e θ a velocidade angular e a aceleração angular da barra.



04. (2,0 pontos) A barra delgada AB, de massa m, está fixada à mola de constante elástica k, conforme ilustra a figura. O comprimento da mola quando ela não está deformada é igual a L e $\theta_0 = 30°$. Não há atrito e a gravidade local possui módulo g constante e aponta verticalmente para baixo. Calcule quando a barra assumir a posição vertical:



a) (1,0) a sua velocidade angular;
b) (1,0) o seu momento angular.

Dado: o momento de inércia da barra em torno do eixo que passa pelo ponto A é igual a $I = (mL^2)/3$.

Mecânica 2 - 2013.2

2ª Chamada

Resolução

#01. a) $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{x}\frac{dx(t)}{dt} + \hat{y}\frac{dy(t)}{dt} + \hat{z}\frac{dz(t)}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = 4\cos 2t \,,\quad \frac{dy}{dt} = -2\,\text{sen}\,t \,,\quad \frac{dz}{dt} = -4t$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = [4\cos(2t)\hat{x} - 2\,\text{sen}\,t\,\hat{y} - 4t\hat{z}]} \ (m/s)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}:$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = -[8\,\text{sen}(2t)\hat{x} + 2\cos t\,\hat{y} + 4\hat{z}]} \ (m/s^2)$$

b) $\vec{H}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)$

$t = 1: \ \vec{H}(1) = \vec{r}(1) \times m\vec{v}(1)$

$$\vec{r}(1) = (2\,\text{sen}2)\hat{x} + (2\cos 1)\hat{y} - 2\hat{z}$$

$$\vec{v}(1) = (4\cos 2)\hat{x} - (2\,\text{sen}1)\hat{y} - 4\hat{z}$$

$\longrightarrow$

02

$$\vec{H}(1) = 1\ \vec{r}(1) \times \vec{v}(1) \quad , \quad m = 1\,kg$$

$$\vec{H}(1) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2\,\text{sen}\,2 & 2\cos 1 & -2 \\ 4\cos 2 & -2\,\text{sen}\,1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}(-4\cos 1 - 4\,\text{sen}\,1) + \hat{y}(-8\cos 2 + 8\,\text{sen}\,2) +$$

$$+ \hat{z}(8\cos 1\cos 2 + 4\,\text{sen}\,1\,\text{sen}\,2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{H}(1) = &-4(\cos 1 + \text{sen}\,1)\hat{x} + \\ &+ 8(\text{sen}\,2 - \cos 2)\hat{y} + \\ &+ 4(2\cos 1\cos 2 + \text{sen}\,1\,\text{sen}\,2)\hat{z} \end{aligned}}$$

c) $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$

$\vec{v}(0) = 4\hat{x}$ m/s

$\vec{v}(1) = (4\cos 1)\hat{x} - (2\,\text{sen}\,1)\hat{y} - 4\hat{z}$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(1) - \vec{p}(0)$$

$\longrightarrow$

$$\boxed{\Delta\vec{p} = 4(\cos 1 - 1)\,\hat{x} - (2\,\mathrm{sen}\,1)\,\hat{y} - 4\hat{z}}$$

#02. a) Como $a_t = cte$: $v_B^2 = v_0^2 - 2a_t\,\Delta s$

$\Delta s = \alpha R$;

$$v_B^2 = v_0^2 - 2a_t\alpha R$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_0^2 - 2\alpha a_t R}}$$

b) $$\rho_B = \left.\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}\right|_{x = x_B = R}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R}{2}\,\frac{1}{3R}\,e^{x/3R} = \frac{e^{x/3R}}{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e^{x/3R}}{18R}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_R = \frac{e^{1/3}}{6} \quad , \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_R = \frac{e^{1/3}}{18R}$$

→

$$\rho_B = \frac{\left[1 + \frac{1}{36} e^{2/3}\right]^{3/2}}{\frac{e^{1/3}}{18R}} = 18R \left[1 + \frac{1}{36} e^{2/3}\right]^{3/2} e^{-1/3}$$

$$\rho_B = 18R \left[e^{-1/2} + \frac{1}{36} e^{2/3 - 1/2}\right]^{3/2}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = 1/6 \, ;$$

$$\boxed{\rho_B = 18R \left[e^{-1/2} + \frac{1}{36} e^{1/6}\right]^{3/2}}$$

c) $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

$$a_{nB} = \frac{v_B^2}{\rho_B} \, , \quad a_B = \sqrt{a_{tB}^2 + a_{nB}^2}$$

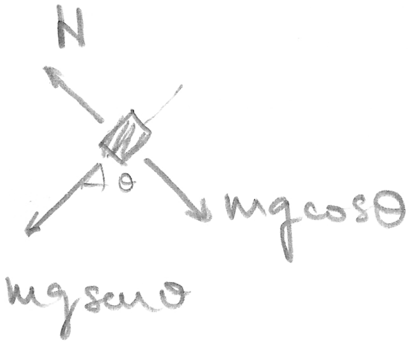
$$a_{nB} = \frac{v_0^2 - 2\alpha a_t R}{\rho_B}$$

$$a_B = \frac{v_0^2 - 2\alpha a_t R}{18R\left[e^{-1/2} + e^{1/6}/36\right]^{3/2}}$$

$\longrightarrow$

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^2 + \frac{(v_0^2 - 2\alpha a_t R)^2}{324\,[e^{-1/2} + e^{1/6}/36]^3}}}$$

d)



$$N - mg\cos\theta = F_{cp}$$

$$N = F_{cp} + Mg\cos\theta$$

$$N = M\left(\frac{v_B^2}{\rho_B} + g\cos\theta\right)$$

$$\tan\theta = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_B} = \frac{e^{1/3}}{6} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{e^{1/3}}{6}\right)$$

$$\boxed{N = M\left[\frac{v_0^2 - 2a_t\alpha R}{18R\,[e^{-1/2} + e^{1/6}/36]^{3/2}} + g\cos\arctan\left(\frac{e^{1/3}}{6}\right)\right]}$$

#03. $\tan\theta = \dfrac{a}{x} \Rightarrow x = \dfrac{a}{\tan\theta}$

$$\frac{dx}{dt} = -v = a\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\tan\theta}\right), \quad \theta = \theta(t).$$

$$v = -a\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) = -\left(\frac{-\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

Mas $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$, logo $v = w\sec^2\theta$

$$w = \frac{v}{\sec^2\theta} \Rightarrow \boxed{w(\theta) = v\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\frac{dw}{dt} = \alpha = v\,2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\omega, \quad w = v\operatorname{sen}^2\theta;$$

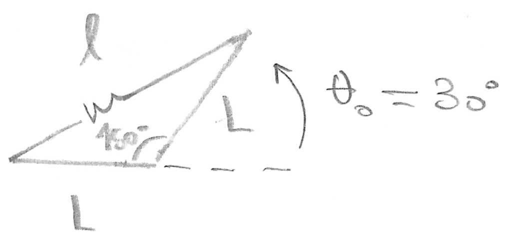
$$\boxed{\alpha(\theta) = 2v^2\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta}$$

04. a) Para $\theta_0 = 30°$ (posição inicial):

$$K_i = 0$$

$$U_{g_i} = mg\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta_0 = mg\frac{L}{4}$$

Nível $U_{g_{\overline{CA}}} = 0$



$$\ell = \sqrt{L^2 + L^2 - 2L^2\cos 150°}$$

$$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

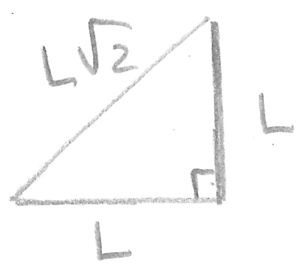
$$\ell = \sqrt{2L^2 + 2\sqrt{3}L^2} = L\sqrt{2(1+\sqrt{3})}$$

Portanto, $U_{el_i} = \frac{k}{2}\ell^2 = \frac{k}{2}L^2(2+2\sqrt{3})$.

Para $\theta_0 = 90°$ (posição final):

$$K_f = \frac{I_A\omega^2}{2} = \frac{mL^2\omega^2}{6}$$

$$U_{g_f} = mg\frac{L}{2}$$



$$U_{el_f} = \frac{k}{2}(L\sqrt{2})^2$$

08

Utilizando conservação da energia:

$$mg\frac{L}{4} + \frac{k}{\cancel{2}}L^2 \cdot \cancel{2}(1+\sqrt{3}) = \frac{mL^2\omega^2}{6} + mg\frac{L}{2} + kL^2$$

$$mg\frac{L}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) + kL^2(1+\sqrt{3}-1) = \frac{mL^2\omega^2}{6}$$

$$kL^2\sqrt{3} - mg\frac{L}{4} = \frac{mL^2\omega^2}{6}$$

$$\omega^2 = \frac{6}{mL^2}\left(kL^2\sqrt{3} - mgL/4\right)$$

$$\boxed{\omega = \left[\frac{6k\sqrt{3}}{m} - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\right]^{1/2}}$$

b) $H = I_A\omega = \frac{mL^2}{3}\omega$

$$\boxed{H = \frac{mL^2}{3}\sqrt{\frac{6k\sqrt{3}}{m} - \frac{3}{2}\frac{g}{L}}}$$