UNIVERSIDADE DE PERNAMBUCO

POLI ESCOLA POLITÉCNICA DE PERNAMBUCO

Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
28 de junho de 2013
Mecânica 2 - 1° Semestre 2013 – 2ª Prova

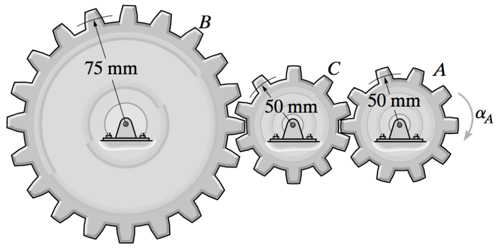
Nome:____

ATENÇÃO: Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI). Considere g = 10 m/s^2.

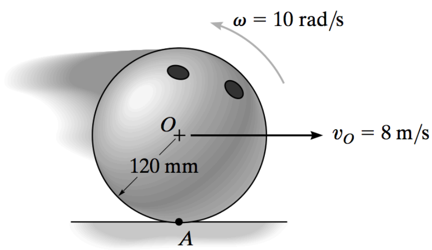
RESOLVA APENAS TRÊS DOS QUATRO PROBLEMAS A SEGUIR.

01. (4,0 pontos) Um conjunto de três engrenagens de raios $R_A = R_C = 50\ mm$ e $R_B = 75\ mm$ é mostrado na figura abaixo. A engrenagem A é impulsionada no sentido horário com uma aceleração angular α_A que depende do tempo na forma $\alpha_A(t) = (3t + 2)\ rad/s^2$.

a) (1,5) Determine uma expressão para o módulo da velocidade angular da engrenagem A, ou seja, $\omega_A(t)$ sabendo que $\omega_A(0) = 0$.
b) (1,0) Obtenha o módulo das velocidades angulares das engrenagens B e C, ou seja, $\omega_B(t)$ e $\omega_C(t)$.
c) (1,5) Calcule a energia cinética de rotação da engrenagem B em $t = 1{,}0\ s$ sabendo que seu momento de inércia em torno do eixo que passa pelo seu centro é igual a $I_B = 2{,}0\ kgm^2$.



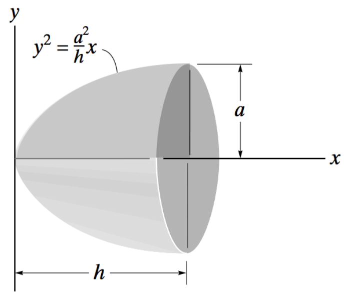
02. (4,0 pontos) Uma bola de boliche é arremessada de maneira que sua velocidade angular é igual a $\omega = 10\ rad/s$ no sentido anti-horário enquanto que o seu centro O se move para a direita com velocidade $v_O = 8{,}0\ m/s$. Veja a figura. O raio da bola é igual a $R = 120\ mm$, a sua massa é igual a $m = 2{,}0\ kg$ e o seu momento de inércia em torno do eixo que passa por O é igual a $I_O = 4{,}0\ kgm^2$. Determine:



a) (1,5) a velocidade do ponto A, de contato da bola com o piso;
b) (1,5) a energia cinética de rotação da bola;
c) (1,0) a energia cinética de translação da bola.

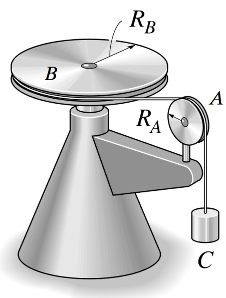
03. (4,0 pontos) O parabolóide da figura é formado pelo sólido de revolução completa da curva $y^2 = a^2x/h$ em torno do eixo x. Suponha que este sólido possui uma densidade volumétrica de massa constante e igual a ρ.

a) (1,5) Calcule a massa total deste parabolóide.
b) (1,5) Obtenha o momento de inércia do parabolóide em torno do eixo x em função de sua massa.
c) (1,0) Obtenha o momento de inércia do parabolóide em torno do eixo que passa pelo ponto (h, a) e é paralelo ao eixo x.



04. (4,0 pontos) A montagem da figura consiste em duas polias, uma de raio R_A e massa m_A e outra de raio R_B e massa m_B. Um bloco C de massa m_C está preso a um fio ideal que não desliza nas polias. Não há atrito.

a) (1,0) Se o bloco C for puxado para baixo com velocidade constante e de módulo igual a v_0, determine as velocidades angulares das polias A e B, ou seja, ω_A e ω_B.
b) (1,5) Se o bloco C for abandonado do repouso, determine a sua velocidade após ele ter descido de uma altura h.
c) (1,5) Se o bloco C for abandonado do repouso, calcule as velocidades angulares dos discos A e B após C ter descido de uma altura h.



Dado: momento de inércia de uma polia de massa m e raio R em torno do eixo que passa pelo seu centro $I = (mR^2)/2$.

Mecânica 2 - 2ª Prova

2013.1

Gabarito

#01. a) $\frac{d\omega_A}{dt} = \alpha_A \Rightarrow d\omega_A = \alpha_A dt$

$$\int_0^{\omega_A} d\omega_A = \int_0^t \alpha_A dt$$

$$\omega_A(t) - \omega_A(0) = \int_0^t (3t+2)\,dt$$

$$\boxed{\omega_A(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t}$$

b) Como as engrenagens estão em contato:

C: $v_A = v_C \Rightarrow \omega_A \cancel{R_A} = \omega_C \cancel{R_C}$, $R_A = R_C$

$$\omega_C = \omega_A \Rightarrow \boxed{\omega_C(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t}$$

B: $v_A = v_C = v_B \Rightarrow v_B = v_A$

→

02

$$w_B R_B = w_A R_A$$

$$w_B = \frac{R_A}{R_B} w_A = \frac{50 \cancel{mm}}{75 \cancel{mm}} w_A = \frac{10}{15} w_A$$

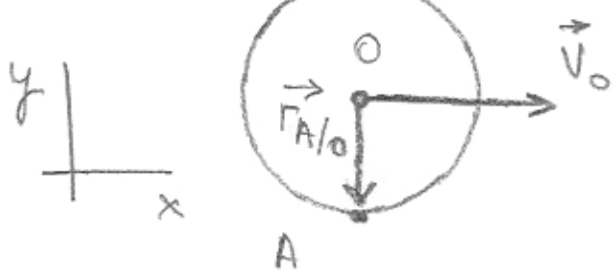
$$w_B = \frac{2}{3} w_A \Rightarrow \boxed{w_B(t) = t^2 + \frac{4}{3} t}$$

c) $$K_{rot} = \frac{I_B w_B^2}{2}$$

$$t = 1s \Rightarrow w_B(1s) = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \text{ rad/s}$$

$$K_{rot}(1s) = \frac{2}{2} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{K_{rot} = \frac{49}{9} \text{ J}}$$

#02. 1)



$$\vec{V}_{A/o} = \vec{V}_A - \vec{V}_o$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A/o} + \vec{V}_o$$

$$\vec{r}_{A/o} = R(-\hat{j})$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/0}$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \hat{x} \,, \quad \vec{w} = w \hat{z} \,, \quad \vec{r}_{A/0} = R(-\hat{y})$$

$$\vec{v}_A = v_0 \hat{x} + \omega R \, \hat{z} \times (-\hat{y})$$

$$\hat{z} \times (-\hat{y}) = -(\hat{z} \times \hat{y}) = \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

$$\therefore \vec{v}_A = \hat{x}\,(v_0 + \omega R)$$

$$\vec{v}_A = \hat{x}\,(8 + 10 \cdot 0{,}12)$$

$$\boxed{\vec{v}_A = 9{,}2 \, m/s \, \hat{x}}$$

b) $$K_{rot} = \frac{I_0 w^2}{2} = \frac{4 \cdot 10^2}{2} = 200 \, J$$

$$\boxed{K_{rot} = 200 \, J}$$

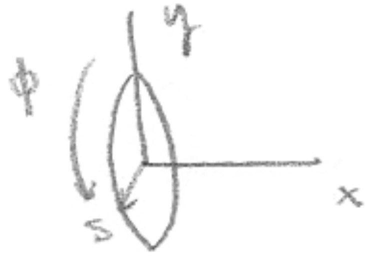
c) $$K_{trans} = \frac{m v_0^2}{2} = \frac{2 \cdot 8^2}{2} = 64 \, J$$

$$\boxed{K_{trans} = 64 \, J}$$

04

#03. a) $m = \int \rho \, dV = \rho \int dV = \rho V$

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^s s \, ds \, d\phi \, dx$$



$$V = 2\pi \int_0^h \frac{s^2}{2} \, dx \, , \quad s = s(x) = \sqrt{\frac{a^2}{h} x^2}$$

$$V = \frac{2\pi}{2} \int_0^h \frac{a^2}{h} x \, dx = \frac{\pi a^2}{\cancel{h}} \frac{h^{\cancel{2}}}{2} = \frac{\pi a^2 h}{2}$$

$$m = \rho V \Rightarrow \boxed{m = \frac{\pi a^2 h \rho}{2}}$$

Poderíamos ainda calcular o volume do sólido rotacionando a curva $y(x)$ em torno do eixo x:

$$V = \int \pi [y(x)]^2 \, dx = \pi \int_0^h \frac{a^2}{h} x \, dx = \frac{\pi a^2 h}{2}$$

b) $I = \int r^2 \, dm$

$dI = y^2 \frac{dm}{2}$

$dV = \pi y^2 dx$

$$I = \int dI = \int y^2 \frac{dm}{2} \quad , \quad dm = \rho \, dV$$

$$I = \int \frac{y^2}{2} \rho \, dV = \frac{1}{2} \rho \int_0^h y^2 \pi y^2 dx$$

$$I = \frac{\pi \rho}{2} \int_0^h y^4 dx = \frac{\pi \rho}{2} \int_0^h (y^2)^2 dx$$

$$I = \frac{\pi \rho}{2} \int_0^h \frac{a^4}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi \rho a^4}{2h^2} \frac{h^3}{3}$$

$$I = \frac{\pi \rho a^4 h}{6}$$

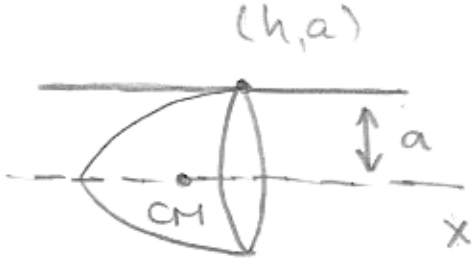
$$\frac{I}{M} = \frac{\frac{\pi \rho a^4 h}{6}}{\frac{\pi a^2 h \rho}{2}} = \frac{\cancel{\pi} \cancel{\rho} a^4 h}{\cancel{6} 3} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi} a^2 h \cancel{\rho}}$$

$$\boxed{I = \frac{m a^2}{3}}$$

06

c) Teorema dos eixos paralelos:

$$I = I_{CM} + md^2 \quad , \quad I_{CM} = \frac{ma^2}{3}$$



$$I = \frac{ma^2}{3} + ma^2$$

$\underline{\underline{d = a}}$

$$\boxed{I = \frac{4}{3} ma^2}$$

#04. a) Como o fio não desliza:

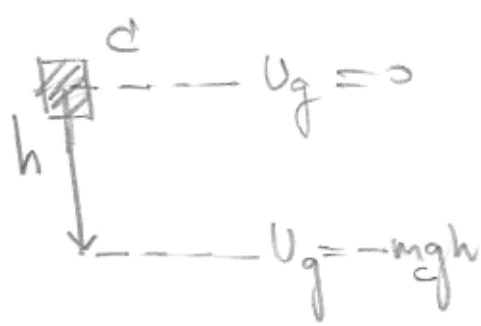
$$V_0 = V_A = V_B$$

$$V_0 = \omega_A R_A \Rightarrow \boxed{\omega_A = \frac{V_0}{R_A}}$$

$$V_0 = \omega_B R_B \Rightarrow \boxed{\omega_B = \frac{V_0}{R_B}}$$

b) $\Delta K + \Delta U = 0$

$$K_A + K_B + K_C - m_c g h = 0$$



→

$$\frac{I_A w_A^2}{2} + \frac{I_B w_B^2}{2} + \frac{m_c v_c^2}{2} = m_c g h$$

$$I_A = \frac{m_A R_A^2}{2} \quad , \quad I_B = \frac{m_B \cdot R_B^2}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{m_A R_A^2}{2} w_A^2 + \frac{m_B R_B^2}{2} w_B^2 + m_c v_c^2 = 2 m_c g h$$

Mas $w_A R_A = w_B R_B = v_c$, pois o fio não desliza.

Logo,

$$\frac{m_A}{2} v_c^2 + \frac{m_B}{2} v_c^2 + m_c v_c^2 = 2 m_c g h$$

$$v_c^2 \left(\frac{m_A}{2} + \frac{m_B}{2} + m_c \right) = 2 m_c g h$$

$$v_c^2 \left(\frac{m_A + m_B + 2 m_c}{2} \right) = 2 m_c g h$$

$$v_c^2 = \frac{4 m_c g h}{m_A + m_B + 2 m_c}$$

$$\boxed{v_c = 2 \sqrt{\frac{m_c g h}{m_A + m_B + 2 m_c}}}$$

c) $\omega_A R_A = v_A = v_c$

$$\omega_A = \frac{v_c}{R_A} \Longrightarrow \boxed{\omega_A = \frac{2}{R_A}\sqrt{\frac{m_c g h}{m_A + m_B + 2m_c}}}$$

$$\omega_B R_B = v_B = v_c$$

$$\boxed{v_B = \frac{2}{R_B}\sqrt{\frac{m_c g h}{m_A + m_B + 2m_c}}}$$