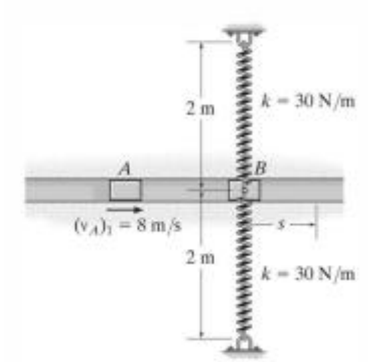
# Universidade de Pernambuco
# Escola Politécnica de Pernambuco
**29 de novembro de 2013**
**Mecânica 2 – Turma FG – 2° Semestre 2013 – 2ª Prova**

**Nome:_______________________________________________________________________________**

**ATENÇÃO:**
**Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI).**

01. (4,0 pontos) Uma montagem feita em uma mesa horizontal é constituída de dois blocos $A$ e $B$, de massas iguais a $10{,}0\ kg$, que podem se mover apenas ao longo da linha de colisão sem atrito. O bloco $A$ foi arremessado com uma velocidade inicial de $8{,}0\ m/s$ enquanto que o bloco $B$ está em repouso preso à duas molas ideais de constante elástica $k = 30\ N/m$ e comprimento quando não estão deformadas de $2{,}0\ m$. Observe a figura.

a) (1,0) Se a colisão é completamente inelástica, determine a velocidade do sistema imediatamente após a colisão.
b) (1,0) Determine a fração de energia cinética perdida na colisão.
c) (1,0) Calcule a distância máxima $s_{máx}$ atingida pelos blocos.
d) (1,0) Considere que a colisão ocorre de forma inelástica, com coeficiente de restituição igual a $e = 0{,}4$. Determine a energia cinética do bloco $A$ imediatamente após a colisão.

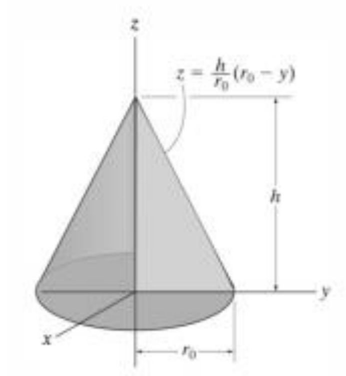



02. (3,5 pontos) Considere um cone sólido que é formado pela revolução da curva

$$z = h(r_0 - y)/r_0$$

em torno do eixo $z$, conforme ilustrado na figura. O cone é feito de um material de densidade volumétrica de massa $\rho$, constante.

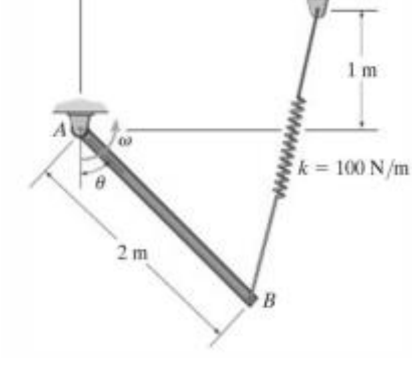
a) (1,0) Calcule a massa total deste corpo.
b) (1,5) Obtenha o momento de inércia do objeto em torno do eixo $z$.
c) (1,0) Determine a energia cinética e o momento angular do cone quando ele gira em torno do eixo $z$ com uma velocidade angular constante e igual a $\omega_0$.




03. (2,5 pontos) A barra delgada $AB$, de massa $m = 20\ kg$ e comprimento $L = 2{,}0\ m$ está fixada a uma mola de constante elástica $k = 100\ N/m$, conforme ilustra a figura. Não há atrito e a gravidade local possui módulo $g$ constante e aponta verticalmente para baixo. A barra é abandonada do repouso em $\theta = 0$.

a) (1,0) Calcule o valor da velocidade angular $\omega$ da barra no instante em que o $\theta = 90°$.
b) (1,0) Se a barra for desconectada da mola e abandonada da posição horizontal, quando $\theta = 90°$, determine o momento angular da barra quando ela passa pela posição angular $\theta = 60°$.
c) (0,5) O momento angular se conserva durante o movimento descrito no item anterior? Justifique.

*Dado: o momento de inércia da barra em torno do eixo que passa pelo ponto $A$, perpendicular ao plano da figura, é igual a $I = (mL^2)/3$.*



# Mecânica 2 – 2013.2
## 2ª Prova
## Resolução

#01. a) $P_i = P_f$

$$m_A v_A + m_B \cdot 0 = (m_A + m_B) V$$

$$V = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_A \Rightarrow \boxed{V = \frac{v_A}{2}} = 4 \text{ m/s}.$$

b) $$f = \frac{K_f}{K_i} = \frac{(m_A+m_B)V^2/2}{m_A v_A^2/2} = \frac{2\cancel{m}V^2}{\cancel{m}v_A^2}$$

$$f = \frac{2(v_A/2)^2}{v_A^2} = \frac{2 \cdot \cancel{v_A^2}/4}{\cancel{v_A^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f = 1/2}$$

c) $\Delta K + \Delta U = 0$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$K_i = \frac{(m_A+m_B)V^2}{2} = mV^2 = m\frac{v_A^2}{4} = 10 \cdot \frac{64}{4}$$

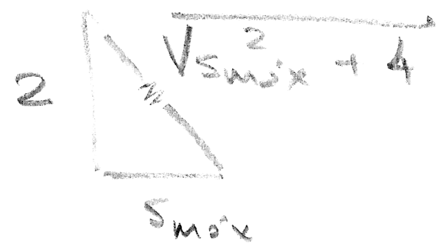
02

$K_i = 160 \, J$

$U_i = 0$

$K_f = 0$

$U_f = ?$




$$U_f = \cancel{2} \frac{k}{\cancel{2}} \left(\sqrt{s_{máx}^2 + 4}\right)^2 = k \left(s_{máx}^2 + 4\right)$$

$$U_f = 30 \left(s_{máx}^2 + 4\right)$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$160 + 0 = 0 + 30 \left(s_{máx}^2 + 4\right)$$

$$\frac{16\cancel{0}}{3\cancel{0}} = s_{máx}^2 + 4$$

$$\frac{16}{3} - 4 = \frac{16 - 12}{3} = s_{máx}^2$$

$$s_{máx} = \sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow \boxed{s_{máx} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \, m}$$

d)
$$e = \frac{v_{rel,\,afastamento}}{v_{rel,\,aproximação}} = \frac{v_A' + v_B'}{v_A}$$

$$e v_A = v_A' + v_B'$$

$$v_A = -v_A' + v_B' \quad \text{(conservação de momento)}$$

$$v_B' = v_A + v_A' :$$

$$e v_A = v_A + 2v_A' \Rightarrow v_A' = \frac{(e-1)\,v_A}{2}$$

$$v_A' = \frac{0{,}6}{2} v_A = 0{,}3 \cdot 8$$

$$v_A' = 2{,}4 \text{ m/s}$$

$$K_A' = \frac{m_A v_A'^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{24}{10}\right)^2$$

$$K_A' = \frac{10}{2}\left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{14\cancel{4}0}{5\cancel{0}}$$

$$\boxed{K_A' = \frac{144}{5} \text{ J}}$$

04

#02. $M = \int \rho \, dV = \rho \int dV \quad , \quad dV = \pi y^2 \, dz$


$$M = \rho \int \pi y^2 \, dz \quad , \quad y = y(z)$$

$$z r_0 = h(r_0 - y) \Rightarrow \frac{z r_0}{h} = r_0 - y$$

$$y = r_0 - \frac{z r_0}{h} = r_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

$$M = \rho \pi \int_0^h r_0^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz$$

$$1 - \frac{z}{h} = u \quad , \quad \frac{du}{dz} = -\frac{1}{h} \Rightarrow dz = -h \, du$$

$$\int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = \int_{u_i}^{u_f} u^2 (-h \, du) = -h \frac{u^3}{3} \Big|_{u_i}^{u_f}$$

$$M = -\rho \pi r_0^2 \frac{h}{3} \left[\left(1 - \frac{h}{h}\right)^3 - \left(1 - \frac{0}{h}\right)^3\right]$$

$$\boxed{M = \frac{\rho \pi r_0^2 h}{3}}$$

b) $I_z = \int dI_z = \int \frac{dm\, r^2}{2} \quad , r = y$

$$I_z = \rho \int \frac{y^2}{2} dV = \rho \int y^2 \frac{\pi}{2} y^2 dz$$

$$I_z = \rho \frac{\pi}{2} \int y^4 dz = \rho \frac{\pi}{2} \int_0^h r_0^4 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^4 dz$$

$$\int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^4 dz = \int_{u_i}^{u_f} (-h) u^4 du = -h \frac{u^5}{5} \Big|_{u_i}^{u_f}$$

$$I_z = -\frac{\rho \pi r_0^4}{2} \frac{h}{5} \left[ \left(1 - \frac{h}{h}\right)^5 - \left(1 - \frac{0}{h}\right)^5 \right]$$

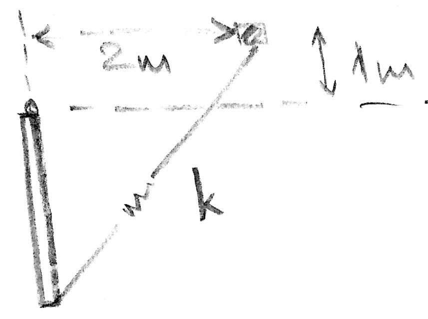
$$\boxed{I_z = \frac{\rho \pi r_0^4 h}{10}} \qquad \rho \pi h r_0^2 = 3M$$

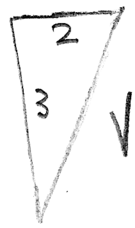
$$\boxed{I_z = \frac{3}{10} M r_0^2}$$

c) $K = \frac{I_z \omega_0^2}{2} \Rightarrow \boxed{K = \frac{3}{20} M r_0^2 \omega_0^2}$

$$H = I_z w_0 \Rightarrow \boxed{H = \frac{3}{10} M r_0^2 w_0^2}$$

#03. a)




$\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\underbrace{\cancel{K_i}}_{0} + U_i = K_f + U_f$$


$$U_{gi} + U_{eli} = \frac{I w^2}{2} + \underbrace{\cancel{U_{gf}}}_{0} + U_{elf}$$

$$-mg\frac{L}{2} + \frac{k}{2}13 = \frac{mL^2}{6}w^2 + \frac{k}{2}1^2$$

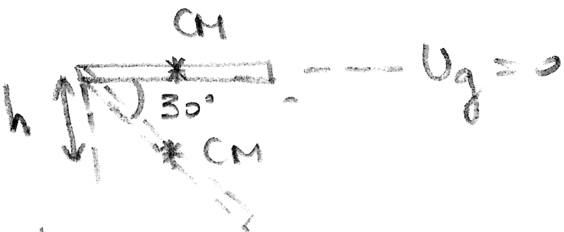
$$-100 + \frac{13}{2}100 - \frac{100}{2} = \frac{20 \cdot 4 w^2}{6}$$

$$-100 + 650 - 50 = \frac{10}{3} \cdot 4w^2$$

$$\frac{50\cancel{0} \cdot 3}{1\cancel{0}} = 4w^2 \Rightarrow \frac{150}{4} = w^2$$

$$w = \frac{\sqrt{25 \cdot 6}}{2} = \boxed{\frac{5}{2}\sqrt{6}\ rad/s}$$

b) $\cancelto{0}{K_i} + \cancelto{0}{U_i} = K_f + U_f$




$$0 = \frac{I\omega^2}{2} - mgh \quad , \quad h = \frac{L}{2}\,\text{sen}30°$$

$$\frac{\cancel{m}L^2}{3}\cdot\frac{\omega^2}{2} = \cancel{m}g\frac{L}{4}$$

$$\frac{L^{\cancel{2}}\omega^2}{3} = g\frac{\cancel{L}}{2} \quad \Rightarrow \quad w^2 = \frac{3}{2}\,g/L$$

$$w = \sqrt{\frac{30}{4}}$$

$$\therefore \quad w = \frac{1}{2}\sqrt{30} \ \text{rad/s}$$

$$H = Iw \Rightarrow H = \frac{mL^2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{30}$$

$$H = \frac{10\cdot 4\sqrt{30}}{3} \Rightarrow \boxed{H = \frac{40}{3}\sqrt{30}\ \text{kgm}^2/\text{s}}$$

c) Não, pois existe o torque do peso que é uma força externa. Por esse motivo:

$$H_0 = 0 \quad , \quad H = \frac{40}{3}\sqrt{30}\ \text{kgm}^2/\text{s}$$

(horizontal) (inclinada)