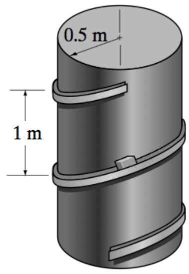
Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
12 de julho de 2013
Mecânica 2 - 1° Semestre 2013 – Exame Final

Nome:____

ATENÇÃO: Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI). Nos problemas numéricos utilize g = 10 m/s^2.

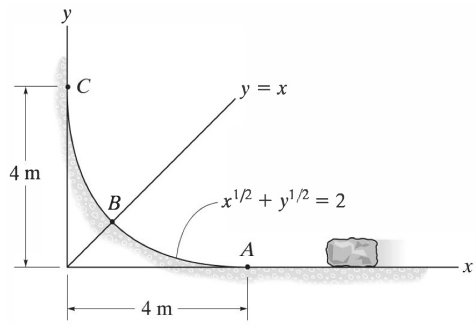
01. (2,0 pontos) Uma caixa desliza sem atrito ao longo de uma trajetória helicoidal descrita pelas equações: $r(t) = 0{,}5\, m$, $\theta(t) = (2{,}0\, t^2)\, rad$ e $z(t) = (2{,}0 - 4{,}0t^2)\, m$, onde t está em segundos. Determine:



a) (1,0) a velocidade e a aceleração da caixa para um instante genérico de tempo t;
b) (1,0) os módulos da velocidade e da aceleração para $t = 4\pi$.

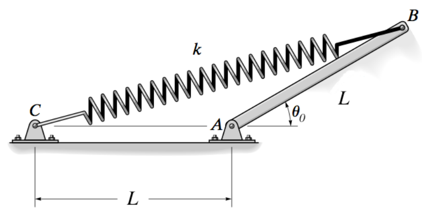
Dados: $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_z\hat{z}, a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2, a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta},\ a_z = \ddot{z}$

02. (3,0 pontos) Uma pedra de massa $m = 20\, kg$ possui uma velocidade no ponto A igual a $v_A = 8\, m/s$, horizontal, imediatamente antes de deslizar pela curva $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$. Despreze os efeitos do atrito e as dimensões da pedra. Sabendo que o ponto B é a interseção da curva anterior com a reta $y = x$, determine para o ponto B:



a) (1,0) o raio de curvatura da trajetória, ρ_B;
b) (1,0) o módulo da velocidade da pedra, v_B;
c) (1,0) o módulo da reação normal sobre a pedra, N_B.

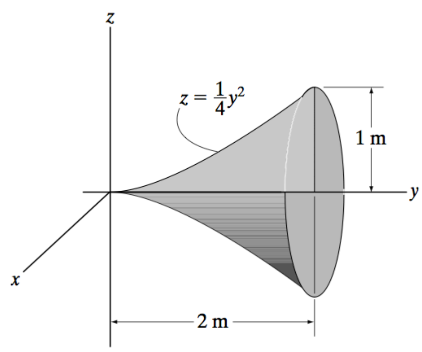
03. (2,5 pontos) A barra delgada AB, de massa m, está fixada à mola de constante elástica k, conforme ilustra a figura. O comprimento da mola quando ela não está deformada é igual a L. Não há atrito e a gravidade local possui módulo g constante e aponta verticalmente para baixo.



a) (1,5) Calcule o valor da velocidade angular da barra no instante em que a mola se torna não deformada.
b) (1,0) Determine a energia cinética de rotação da barra para o caso do item anterior.

Dado: o momento de inércia da barra em torno do eixo que passa pelo ponto A é igual a $I = (mL^2)/3$.

04. (2,5 pontos) A seção de cone da figura é formado pelo sólido de revolução completa da curva $z = y^2/4$ em torno do eixo y. Suponha que este sólido possui uma densidade volumétrica de massa constante e igual a $\rho = 1\, kg/m^3$.



a) (1,0) Calcule a massa total deste corpo.
b) (1,0) Obtenha o momento de inércia do objeto em torno do eixo y.
c) (0,5) Determine a energia cinética de rotação quando o cone gira em torno do eixo y com uma velocidade angular constante e igual a $\omega_0 = 3{,}0\, rad/s$.

Mecânica 2 – Exame Final

2013.1

Resolução

#01. $r(t) = 0{,}5\ \text{m}$

$\theta(t) = 2t^2\ \text{rad}$

$z(t) = 2 - 4t^2\ \text{m}$

a) $\vec{v}(t) = \hat{r}\,\dot{r} + \hat{\theta}\, r\dot{\theta} + \hat{z}\,\dot{z}$

$= 0\,\hat{r} + \hat{\theta}\,(0{,}5)(4t) + \hat{z}\,(-8t)$

$$\boxed{\vec{v}(t) = (2t\,\hat{\theta} - 8t\,\hat{z})}\quad (\text{m/s})$$

$\vec{a}(t) = [\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2]\,\hat{r} + [r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}]\,\hat{\theta} + \ddot{z}\,\hat{z}$

$= [0 - 0{,}5(16t^2)]\,\hat{r} + [0{,}5(4) + 2.0]\,\hat{\theta} + (-8)\,\hat{z}$

$$\boxed{\vec{a}(t) = (-8t^2\,\hat{r} + 2\hat{\theta} - 8\hat{z})}\quad (\text{m/s}^2)$$

b) $\vec{v}(4\pi) = 8\pi\,\hat{\theta} - 32\pi\,\hat{z}$

$|\vec{v}(4\pi)| = \sqrt{(8\pi)^2 + (-32\pi)^2}$

→

02

$$|\vec{v}(4\pi)| = \sqrt{64\pi^2 + 32^2\pi^2}$$

$$= \pi\sqrt{64 + 1024} = \pi\sqrt{1088}$$

$$= \pi\sqrt{2^2 \cdot 272} = \pi\sqrt{2^4 \cdot 68}$$

$$= \pi\sqrt{2^6 \cdot 17} \Rightarrow |\vec{v}(4\pi)| = 2^3\pi\sqrt{17}$$

$$\boxed{|\vec{v}(t)| = 8\pi\sqrt{17}\ m/s}$$

$$\vec{a}(4\pi) = -8.(16\pi^2)\,\hat{r} + 2\hat{\theta} - 8\hat{z}$$

$$\vec{a}(4\pi) = -64\pi^2\,\hat{r} + 2\hat{\theta} - 8\hat{z}$$

$$|\vec{a}(4\pi)| = \sqrt{(-64\pi^2)^2 + (2)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{64^2\pi^4 + 4 + 64}\ ,\ 64 = 4.16$$

$$= \sqrt{4(1664\pi^4 + 1 + 16)}$$

$$= 2\sqrt{1024\pi^4 + 17}$$

$$\boxed{|\vec{a}(4\pi)| = 2\sqrt{1024\pi^4 + 17}\ m/s^2}$$

#02. $B(x_B, y_B) = ?$

$$x^{1/2} + y^{1/2} = 2 \ , \quad y = x$$

$$2x^{1/2} = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x_B = 1{,}0\,m$$

$$y_B = 1{,}0\,m$$

$$\rho(x_B) = \left. \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \right|_{x = x_B}$$

$$y^{1/2} = 2 - x^{1/2} \Rightarrow y = (2 - x^{1/2})^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(2 - x^{1/2})(-1/2\, x^{-1/2})$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_B = 1} = 2(2-1)(-1/2 \cdot 1) = -1 .$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1 - 2x^{-1/2})$$

$\longrightarrow$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = x^{-3/2}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_B=1} = 1. \Rightarrow \rho(x_B) = \frac{[1+(-1)^2]^{3/2}}{1}$$

$$\rho(x_B) = 2^{3/2} = 2\sqrt{2}\ m = \rho_B.$$

$$\boxed{\rho(x_B) = 2\sqrt{2}\ m}$$

b) $\Delta K + \Delta U = 0$, não há atrito.

$$K_f + U_{gf} = K_i + U_{gi}$$

$$\frac{\cancel{m} v_B^2}{2} + \cancel{m} g y_B = \frac{\cancel{m} v_A^2}{2} + \cancel{m} g y_A$$

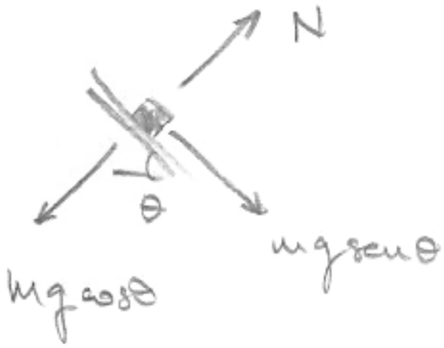
$$v_B^2 = v_A^2 + 2g(y_A - y_B)$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2g(y_B - y_A)}$$

$$v_B = \sqrt{64 - 20(1-0)}$$

$$\boxed{v_B = 2\sqrt{11}\ m/s}$$

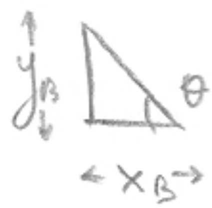
c)



$$N - mg\cos\theta = \frac{m v_B^2}{\rho_B}$$

$$N = mg\cos\theta + \frac{m v_B^2}{\rho_B}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$



$$N = mg\cos 45^\circ + \frac{m v_B^2}{\rho_B}$$

$$N = 20 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{20 \cdot 44}{2\sqrt{2}} = 100\sqrt{2} + 10 \cdot 44 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

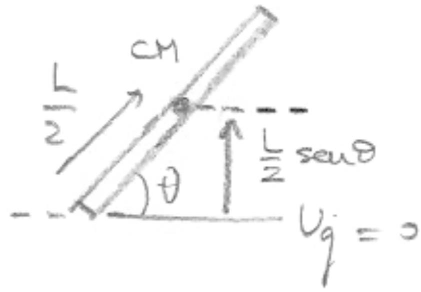
$$N = \sqrt{2}(100 + 220)$$

$$\boxed{N = 320\sqrt{2}\ N}$$

06

#03. 1) $\Delta K + \Delta U = 0$

$$\cancelto{0}{K_i} + U_{g_i} + U_{el_i} = K_f + \cancelto{0}{U_{g_f}} + U_{el_f}$$



$$mg\,\text{sen}\,\theta_0 + \frac{k\ell^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2} + mg\,\text{sen}\,\theta$$

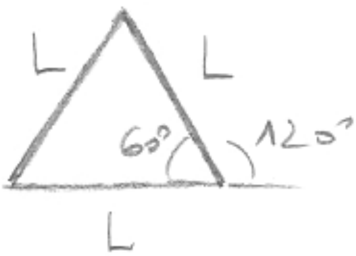
$$\ell = \sqrt{L^2 + L^2 - 2L^2\cos(\pi - \theta_0)}$$

$$\cos(\pi - \theta_0) = -\cos\theta_0$$

$$\ell = \sqrt{2L^2 + 2L^2\cos\theta_0}$$

$$\ell = L\sqrt{2(1+\cos\theta_0)}$$

$$\therefore\ mg\,\text{sen}\,\theta_0 + \frac{k}{2}L^2 \cdot 2(1+\cos\theta_0) = \frac{mL^2}{6}\omega^2 + mg\,\text{sen}\,\theta$$



$\theta = 120°$ quando a mola não está deformada.

$$\frac{mL^2\omega^2}{6} = mg(\text{sen}\,\theta_0 - \text{sen}\,120°) + \frac{k}{\cancel{2}}L^2(\cancel{2} + \cancel{2}\cos\theta_0)$$

$$\text{sen}\,120° = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w^2 = \frac{6g}{L^2}(\operatorname{sen}\theta_0 - \sqrt{3}/2) + \frac{k\cancel{L^2}}{m\cancel{L^2}}\, 6(1+\cos\theta_0)$$

$$\boxed{w = \left[\frac{6g}{L^2}(\operatorname{sen}\theta_0 - \sqrt{3}/2) + \frac{6k}{m}(1+\cos\theta_0)\right]^{1/2}}$$

b) $K_{rot} = \frac{I w^2}{2} = \frac{mL^2 w^2}{6}$

$$\boxed{K_{rot}(\theta_0) = mg(\operatorname{sen}\theta_0 - \sqrt{3}/2) + kL^2(1+\cos\theta_0)}$$

#04. 1) $m = \int \rho\, dV = \rho \int dV = \rho V$

$$V = \int_0^2 (\pi z^2)\, dy = \int_0^2 (\pi y^4/16)\, dy$$

$$V = \frac{\pi}{16} \frac{y^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{\cancel{2^4}} \cdot \frac{2^{\cancel{5}}}{5} \Rightarrow V = \frac{2\pi}{5}$$

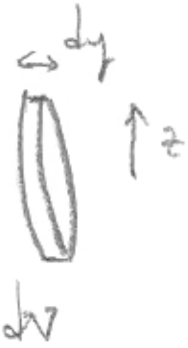
$\rightarrow$

08

$$m = \rho \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \boxed{m = \frac{2\pi}{5}\ \text{kg}}$$

b) $I_y = \int dI_y$, $dI_y = \frac{1}{2} z^2\, dm = \frac{1}{2} z^2 \rho\, dV$

$$I_y = \frac{1}{2}\int \frac{y^4}{16}\rho\, dV, \quad dV = \pi z^2\, dy$$



$$= \frac{1}{32}\int_0^2 \rho\, y^4 \pi \frac{y^4}{16}\, dy = \frac{1}{2^5 \cdot 2^4}\rho\pi\int_0^2 y^8\, dy$$

$$= \frac{\rho\pi}{\cancel{2^9}}\, \frac{\cancel{2^9}}{9} = \frac{\rho\pi}{9} \Rightarrow \boxed{I_y = \frac{\pi}{9}\ \text{kg}\,\text{m}^2}$$

c) $K_{rot} = \frac{I_y \omega_0^2}{2}$

$$K_{rot} = \frac{\pi}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{2} \Rightarrow \boxed{K_{rot} = \frac{\pi}{2}\ \text{J}}$$