

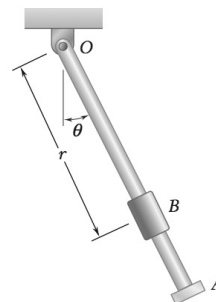
Nome: _____

ATENÇÃO: Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, **NÃO SERÃO CONSIDERADAS**. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI). Nos problemas numéricos utilize $g = 10 \text{ m/s}^2$.

01. (3,0 pontos) A oscilação da barra OA em torno do ponto O é definida pela relação $\theta(t) = (2/\pi)(\text{sen}\pi t)$, onde θ e t estão expressos em radianos e segundos, respectivamente. O colar B desliza ao longo da barra de forma que sua distância até o ponto O é dada por $r(t) = 25/(t + 4)$, onde r e t estão em metros e segundos, respectivamente. Determine:

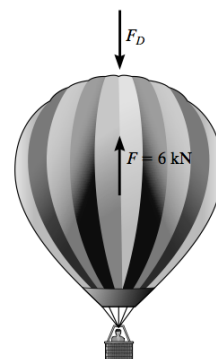
- (1,0) a velocidade do colar B em função do tempo;
- (1,0) a aceleração do colar B em função do tempo;
- (1,0) o módulo da aceleração do colar B para $t = 1 \text{ s}$.

Dados: $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_z\hat{z}$, $a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$, $a_z = \dot{z}$.

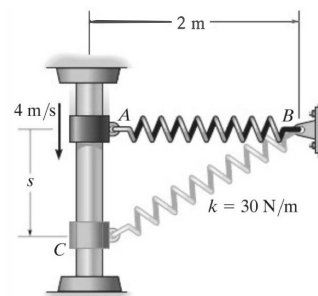


02. (3,0 pontos) Um balão parte do repouso e sobe verticalmente sob influência de uma força de empuxo, de módulo $F = 6000 \text{ N}$, e de uma força de resistência do ar, de módulo $F_D = (100v) \text{ N}$, onde v é o módulo da velocidade de subida. Despreze quaisquer outros efeitos sobre o movimento do balão e considere que sua massa seja igual a $m = 500 \text{ kg}$.

- (0,5) Esboce um diagrama de corpo isolado para o balão.
- (1,0) Obtenha uma expressão para o módulo da aceleração do balão em função de v .
- (1,0) Calcule a velocidade do balão em função do tempo.
- (0,5) Determine qual a maior velocidade de subida possível para o balão.

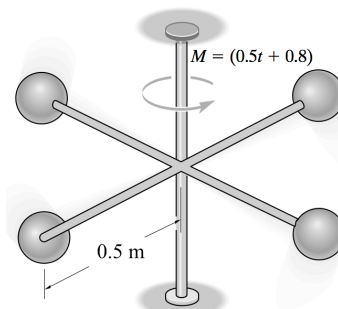


03. (1,5 pontos) Uma argola de massa $m = 2 \text{ kg}$ é arremessada verticalmente para baixo com uma velocidade $v = 4 \text{ m/s}$ no ponto A . Se a mola possui um comprimento de 1 m quando não está deformada e constante elástica $k = 30 \text{ N/m}$, calcule a velocidade da argola quando ela atinge a posição C , dada por $s = 1 \text{ m}$. Despreze qualquer efeito do atrito e utilize $\sqrt{5} = 2,25$.



04. (2,5 pontos) Considere o sistema formado por quatro partículas, cada uma com massa $m = 0,2 \text{ kg}$, que estão conectadas a um eixo girante por braços de comprimento $0,5 \text{ m}$ cada. Todo o conjunto está sob ação de um momento externo cujo módulo varia com o tempo na forma $M = (0,5t + 0,8) \text{ Nm}$, onde t está em segundos. Determine:

- (1,0) o momento de inércia de giro do sistema em torno do eixo de rotação;
- (1,0) a velocidade tangencial de giro das esferas em $t = 4 \text{ s}$;
- (0,5) a energia cinética do sistema em $t = 4 \text{ s}$.



EXAME FINAL

RESOLUÇÃO

#01. 4) $\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + \cancel{\dot{z} \hat{z}}$

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} 25(t+4)^{-1} = -25(t+4)^{-2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{2}{\cancel{t}} \cancel{\pi} \cos \pi t = 2 \cos \pi t$$

$$r \dot{\theta} = \frac{50 \cos \pi t}{(t+4)}$$

Portanto, $\vec{v}(t) = \frac{25}{t+4} \left[(2 \cos \pi t) \hat{\theta} - \frac{\hat{r}}{t+4} \right]$

b) $\ddot{r} = -50(t+4)^{-3}$

$$\ddot{\theta} = -2\pi \sin \pi t$$

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = -50(t+4)^{-3} - \frac{100 \cos^2 \pi t}{t+4}$$

$$a_{\theta} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{-50\pi \sin \pi t}{t+4} - \frac{50}{(t+4)^2} \cdot 2 \cos \pi t \rightarrow$$

$$a_2 = 0, \text{ logo}$$

$$\vec{a}(t) = -\frac{50}{t+4} \left\{ \left[\frac{1}{(t+4)^2} + 2\cos^2\pi t \right] \hat{r} + \left[\pi \sin\pi t + \frac{2\cos\pi t}{(t+4)} \right] \hat{\theta} \right\}$$

$$c) \vec{a}(1) = -\frac{50}{5} \left[\left(\frac{1}{25} + 2\cos^2\pi \right) \hat{r} + \left(\pi \sin\pi + \frac{2\cos\pi}{5} \right) \hat{\theta} \right]$$

$$\vec{a}(1) = -10 \left[\left(\frac{1}{25} + 2 \right) \hat{r} + \left(-\frac{2}{5} \right) \hat{\theta} \right]$$

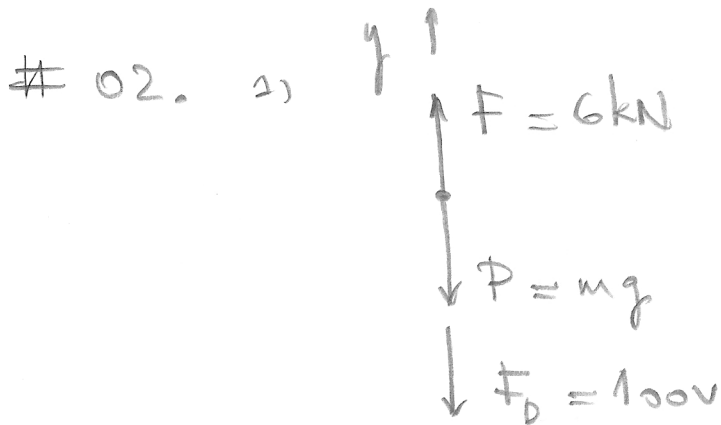
$$= -10 \left[\frac{51}{25} \hat{r} - \frac{2}{5} \hat{\theta} \right]$$

$$a(1) = \sqrt{\left(-10 \cdot \frac{51}{25} \right)^2 + \left(+\frac{20}{5} \right)^2} = 10 \sqrt{\frac{51^2}{25^2} + \frac{4}{25}}$$

$$a(1) = \frac{10}{25} \sqrt{51^2 + 100} = \frac{2}{5} \sqrt{2701}$$

$$a(1) = \frac{6}{5} \sqrt{289} = \frac{6}{5} \cdot 17$$

$$a(1) = \frac{102}{5} \text{ m/s}^2 = 20,4 \text{ m/s}^2$$



b) $F_{ky} = m a_y$, $a_y = a$

$$6000 - 5000 - 1000 \text{ N} = 500 \cdot a$$

$$1000 - 1000 \text{ N} = 500 a$$

$$2 - \frac{1}{5} v = a \Rightarrow$$

$$a = 2 - v/5$$

$$c) \quad a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow 2 - v/5 = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{2 - v/5} \Rightarrow t = \int_0^v \frac{dv}{2 - v/5}$$

$$w = 2 - v/5, \quad \frac{dw}{dv} = -\frac{1}{5} \Rightarrow dv = -5 dw$$

$$\int \frac{dv}{2 - v/5} = \int_{w_i}^{w_f} \frac{-5 dw}{w} = -5 \ln w \Big|_{w_i}^{w_f}$$

$$= -5 \ln (2 - v/5) \Big|_0^v = -5 \ln \left(\frac{2 - v/5}{2} \right)$$

Portanto,

$$-\frac{t}{5} = \ln \left(1 - \frac{v}{10} \right), \text{ exponenciando os dois termos ...}$$

$$e^{-t/5} = 1 - \frac{v}{10} \Rightarrow \frac{v}{10} = 1 - e^{-t/5}$$

$$v(t) = 10 (1 - e^{-t/5})$$

$$d) \quad v_{\max} = ?$$

$$v(t) = 10 (1 - e^{-t/5})$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow v = v_{\max} = 10 (1 - 0)$$

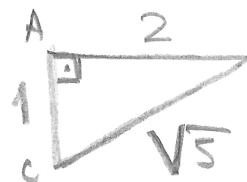
$$\boxed{v_{\max} = 10 \text{ m/s}}$$

#03. Conservação da Energia Mecânica:

$$E_{\text{mec}, A} = E_{\text{mec}, C}, \quad U_{gC} = 0$$

$$\frac{mv_A^2}{2} + mgy_A + \frac{k}{2}(x_A - b)^2 = \frac{mv_C^2}{2} + 0 + \frac{k}{2}(x_C - b)^2$$

$$\frac{2 \cdot 4^2}{2} + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 15(2-1)^2 = v_C^2 + 15(\sqrt{5} - 1)^2$$



$$16 + 20 + 15 = v_C^2 + 15(2,25 - 1)^2$$

$$51 = v_C^2 + 15(1,25)^2 = v_C^2 + 15\left(1 + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$51 = v_C^2 + 15\left(\frac{5}{4}\right)^2 = v_C^2 + 15 \cdot \frac{25}{16}$$

→

$$51 - \frac{15.25}{16} = v_c^2 \Rightarrow \frac{816 - 375}{16} = v_c^2$$

$$\therefore v_c^2 = \frac{441}{16} = \frac{9.49}{16} \Rightarrow v_c = \frac{3.7}{4}$$

$$v_c = \frac{21}{4} \Rightarrow \boxed{v_c = 5,25 \text{ m/s}}$$

#04. a) $I = 4mr^2$, $r = \frac{1}{2} \text{ m}$

$$I = 4 \cdot 0,2 \cdot \frac{1}{4} = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\boxed{I = 1/5 \text{ kgm}^2}$$

b) $\Delta \vec{H} = \int \vec{M}(t) dt$

$$H - \cancel{H_0} = \int_0^4 (0,5t + 0,8) dt$$

$$H = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^4 + 0,8t \Big|_0^4 = \frac{4^2}{2} + 0,8 \cdot 4 \rightarrow$$

$$H = 4 + 3,2 = 7,2$$

$$I\omega = 7,2$$

$$\therefore \omega = 7,2 \cdot 5 = 36$$

$$\text{Mas } v = \omega r \Rightarrow v = 36 \cdot \frac{1}{2}$$

$$v = 18 \text{ m/s}$$

$$c) K_{\text{rot}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{36^2}{2} = \frac{1296}{10}$$

$$K_{\text{rot}} = 129,6 \text{ J}$$