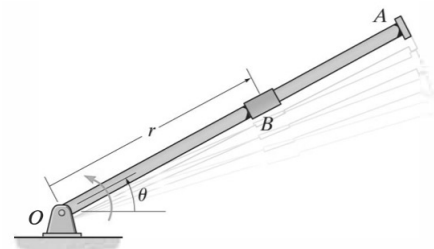


Nome: _____

ATENÇÃO: Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, **NÃO SERÃO CONSIDERADAS**. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI). Nos problemas numéricos utilize $g = 10 \text{ m/s}^2$.

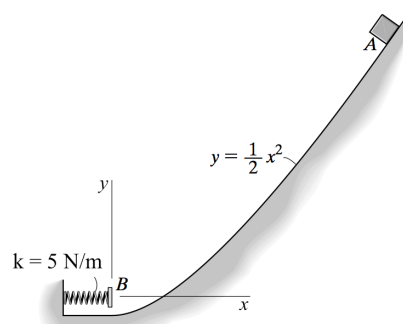
01. (3,0 pontos) A barra OA está girando no sentido anti-horário com uma velocidade angular $\dot{\theta}(t) = (2t)\hat{\theta}$, logo após ter partido do repouso da posição $\theta(t=0) = \pi/6 \text{ rad}$. O colar B se move através da barra por meios mecânicos com uma velocidade radial $\dot{r}(t) = (3t^2)\hat{r}$, onde $\vec{r}(0) = 0,5 \text{ m}$. O movimento está contido em um plano vertical. Desprezando os efeitos gravitacionais sobre o sistema, determine em função do tempo:



- (1,0) a posição radial e angular do colar, ou seja, $\vec{r}(t)$ e $\vec{\theta}(t)$, respectivamente;
- (1,0) a velocidade e a aceleração do colar.
- (1,0) Calcule o instante de tempo em que $|\vec{r}(t)| = 1 \text{ m}$.

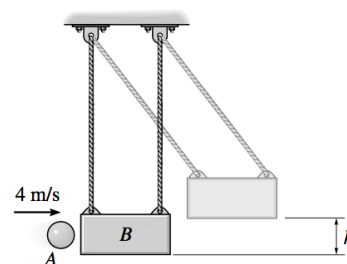
Dados: $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_z\hat{z}$, $a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$, $a_z = \dot{z}$.

02. (3,0 pontos) Um bloco de massa $m = 2 \text{ kg}$ é abandonado do ponto A, de coordenadas $(2,2) \text{ m}$ para, em seguida, deslizar pela trajetória de curva $y = x^2/2$, conforme mostra a figura. Despreze os efeitos do atrito e as dimensões do bloco. Para o ponto de coordenadas $(1, 1/2) \text{ m}$, determine:



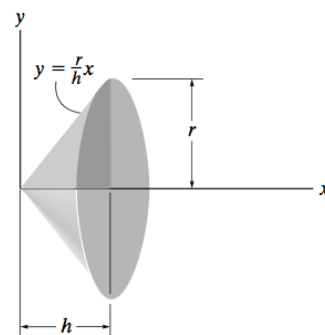
- (0,5) o raio de curvatura da trajetória;
- (1,0) o módulo da velocidade do bloco;
- (0,5) o módulo da aceleração do bloco.
- (1,0) Sabendo que o bloco chega na posição B horizontalmente, calcule a maior deformação possível na mola de constante elástica $k = 5 \text{ N/m}$.

03. (2,0 pontos) Uma bola A de massa 2 kg é arremessada horizontalmente com uma velocidade de 4 m/s em um bloco B, suspenso e de massa 20 kg . Sabendo que o impacto da bola com o bloco dura $0,028 \text{ s}$ e que o coeficiente de restituição da colisão é igual a $e = 0,25$, determine:



- (1,0) a velocidade da bola imediatamente após a colisão;
- (1,0) a força média exercida sobre a bola durante a colisão.

04. (2,0 pontos) A seção de cone da figura é formado pelo sólido de revolução completa da curva $y = rx/h$ em torno do eixo x. Suponha que este sólido possui uma densidade volumétrica de massa constante e igual a ρ .



- (1,0) Calcule a massa total deste corpo.
- (1,0) Obtenha o momento de inércia do objeto em torno do eixo x.

Mecânica 2 - 2013.2

EXAME FINAL

Revisão

#01. $\dot{\theta} = 2t$, $\theta_0 = \pi/6$, $\dot{r} = 3t^2$, $r_0 = \frac{1}{2} \text{ m}$

1) $\theta(t) = ?$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta - \theta_0 = \int_0^t \dot{\theta} dt = \int_0^t 2t' dt'$$

$$\theta - \theta_0 = t^2 \Rightarrow \boxed{\vec{\theta}(t) = \left(\frac{\pi}{6} + t^2\right) \hat{\theta}}$$

$r(t) = ?$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} \Rightarrow r - r_0 = \int_0^t \dot{r} dt = \int_0^t 3t'^2 dt'$$

$$r = r_0 + t^3 \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \left(\frac{1}{2} + t^3\right) \hat{r}}$$

b) $\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + \frac{\dot{\theta}}{2} \hat{z}$

$$\vec{v}(t) = 3t^2 \hat{r} + \left(\frac{1}{2} + t^3\right) 2t \hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = 3t^2 \hat{r} + (t + 2t^4) \hat{\theta}}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + \cancel{\frac{r}{2}\hat{z}}$$

$$\ddot{r} = 6t, \quad \ddot{\theta} = 2$$

$$(\dot{\theta})^2 = 4t^2, \quad \dot{r}\dot{\theta} = 6t^3$$

Portanto,

$$\vec{a}(t) = \left[6t - \left(\frac{1}{2} + t^3 \right) 4t^2 \right] \hat{r} + \left[\left(\frac{1}{2} + t^3 \right) 2 + 2 \cdot 6t^3 \right] \hat{\theta}$$

$$\vec{a}(t) = (6t - 2t^2 - 4t^5) \hat{r} + (1 + 2t^3 + 12t^3) \hat{\theta}$$

$$\vec{a}(t) = (6t - 2t^2 - 4t^5) \hat{r} + (14t^3 + 1) \hat{\theta}$$

c) $|\vec{r}(t)| = 1 \text{ m}$

$$|\vec{r}(t)| = \frac{1}{2} + t^3 = 1 \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ s}$$

#02. a) $\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}$

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = x \Big|_{x=1} = 1$, $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=1} = 1$, então

$$\rho = [1 + 1]^{3/2} = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\boxed{\rho = 2\sqrt{2} \text{ m}}$$

b) Conservação da Energia:

Ponto A: (2, 2) m : $mg y_A$

Ponto C: (1, 1/2) m : $mg y_C + \frac{mv_C^2}{2}$

$$g y_A = g y_C + \frac{v_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(y_A - y_C)}$$

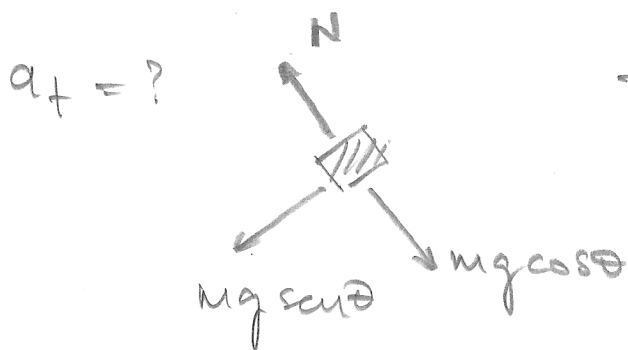
$$v_C = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot (3/2)} = \sqrt{30}$$

$$\boxed{v_C = \sqrt{30} \text{ m/s}}$$

$$c) \vec{a} = a_n \hat{n} + a_t \hat{t}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

$$a_n = \frac{v_c^2}{\rho} = \frac{(\sqrt{30})^2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 30 = 15 \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\tan \theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 1$$

Como $\tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$, logo

$$a_t = mg \sen \theta = mg \sen 45^\circ = 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

Portanto, $a = \sqrt{\frac{15^2 \cdot 2}{4} + 100 \cdot 2}$

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{450 + 800} = \frac{1}{2} \sqrt{1250}$$

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{250 \cdot 5} = \frac{1}{2} \sqrt{50 \cdot 25} \Rightarrow a = \frac{25\sqrt{2}}{2} \text{ m/s}$$

d) Conservação de Energia:

$$mgy_A = \frac{k}{2} d^2 \Rightarrow d^2 = 2mgy_A / k$$

$$d^2 = 20 \cdot 2 \cdot 2 / 5 = 4^2 \Rightarrow \boxed{d = 4m}$$

03. 2) $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$

↓
0

$$2v_A = 2v_A' + 20v_B'$$

$$(I) \quad v_A = v_A' + 10v_B'$$

$$e = \frac{v_B' + v_A'}{v_A} \Rightarrow \frac{v_A}{4} = v_A' + v_B'$$

$$(II) \quad v_B' = 1 - v_A' \text{ em (I):}$$

$$v_A = v_A' + 10 - 10v_A'$$

$$4 - 10 = -9v_A' \Rightarrow v_A' = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ m/s}$$

$$v_A' = \frac{2}{3} \text{ m/s}$$

$$b) \quad f_{med} = \left| \frac{\Delta p_A}{\Delta t} \right|, \quad \phi_{iA} = m_A v_A = 8 \text{ kg m/s}$$

$$p_A = m_A v_A' = \frac{4}{3} \text{ kg m/s}$$

$$\Delta p_A = \frac{4}{3} - 8 = \frac{4 - 24}{3} = -\frac{20}{3}$$

$$f_{med} = \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{0,028} = \frac{20}{3} \cdot \frac{10^3}{28} = \frac{10}{14} \cdot \frac{10^3}{3}$$

$$f_{med} = \frac{5}{21} \cdot 10^3 \Rightarrow f_{med} = \frac{5}{21} \text{ kN}$$

#04.

$$2) \quad m = \int \rho dV, \quad dV = \pi y^2 dx$$

$$y^2 = \frac{r^2}{h^2} x^2 \Rightarrow m = \int_0^h \rho \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx$$



$$m = \frac{\rho r^2 \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\rho r^2 \pi}{h^2} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^h$$

$$m = \frac{\pi \rho r^2 h}{3}$$

b) $I_x = \int dI_x$, $dI_x = y^2 \frac{dm}{2}$

$$dm = \rho dV = \rho \pi y^2 dx \therefore dI_x = \frac{\rho \pi y^4 dx}{2}$$

$$I_x = \frac{\rho \pi}{2} \int_0^h \left(\frac{rx}{h} \right)^4 dx = \frac{\rho \pi r^4}{2h^4} \left. \frac{h^5}{5} \right|_0^h$$

$$I_x = \frac{\rho \pi r^4 h}{10}$$

As anda, $m = \pi \rho r^2 h / 3 \Rightarrow \pi \rho h = 3m / r^2$

$$I_x = \frac{3m}{r^2} \cdot \frac{r^4}{10} \Rightarrow I_x = \frac{3}{10} m r^2$$