Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
Mecânica 2 – 1° Semestre 2014 – Exame Final
Turma FG

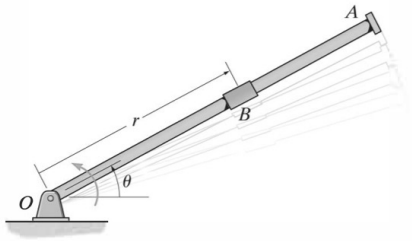
Nome:_____

ATENÇÃO:

Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI).

Nos problemas de resolução numérica considere g = 10 m/s^2.

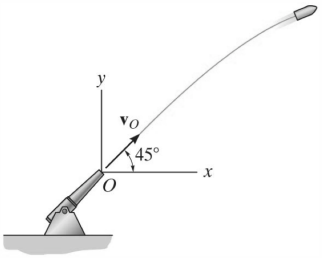
01. (2,5 pontos) A barra OA está girando no sentido anti-horário com uma velocidade angular $\dot{\vec{\theta}}(t) = (2t^2)\hat{\theta}$, logo após ter partido do repouso da posição $\theta(t=0) = \pi/3\ rad$. O colar B se move através da barra por meios mecânicos com uma velocidade radial $\dot{\vec{r}}(t) = (4t)\hat{r}$, onde $\vec{r}(0) = 0$. O movimento está contido em um plano vertical. Desprezando os efeitos gravitacionais sobre o sistema, determine em função do tempo:



a) (1,0) a posição radial e angular do colar, ou seja, $\vec{r}(t)$ e $\vec{\theta}(t)$, respectivamente;
b) (1,5) a velocidade e a aceleração do colar.

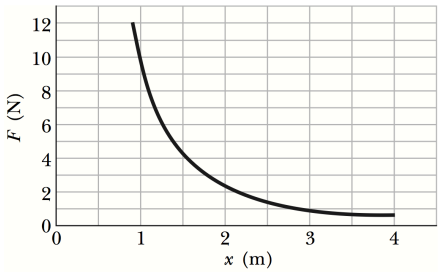
Dados: $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_z\hat{z},\ a_r = \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}\right)^2,\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta},\ a_z = \ddot{z}$.

02. (3,0 pontos) Um projétil de massa m é atirado de um canhão com uma velocidade de módulo v_0 em um ângulo de $45°$ em relação ao eixo horizontal. Sabendo que a aceleração gravitacional local aponta verticalmente para baixo e possui módulo g, determine em função dos dados do problema:



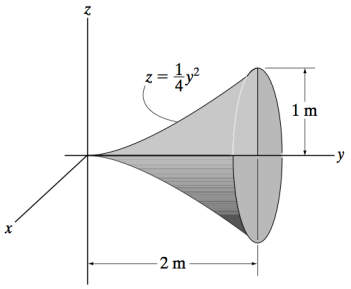
a) (1,0) a altura máxima y_m atingida pelo projétil;
b) (1,0) a velocidade do projétil na altura máxima;
c) (1,0) o módulo do momento angular do projétil em relação ao ponto O no instante de altura máxima.

03. (3,0 pontos) Uma partícula que se move ao longo do eixo x está submetida apenas a uma força que aponta para a direção positiva desse eixo. Sabendo que o módulo da força varia conforme a posição da partícula na forma $F = a/x^2$, onde $a = 9{,}0\ Nm^2$ é uma constante positiva e que a velocidade da partícula em $x = 1\ m$ é igual a zero, determine:



a) (1,0) o módulo da força em $x = 3\ m$;
b) (1,0) o trabalho da força entre as posições $1\ m$ e $3\ m$;
c) (1,0) a energia cinética da partícula em $x = 3\ m$.

04. (1,5 pontos) A seção de cone da figura é formado pelo sólido de revolução completa da curva $z = y^2/4$ em torno do eixo y. Se este sólido possui uma densidade volumétrica de massa constante e igual a $\rho = 1\ kg/m^3$, calcule o seu momento de inércia em torno do eixo y.



Mecânica 2 – Turma FG

Exame Final 2014.1

Resolução

#01. a) $\dot{r} = 4t \Rightarrow \frac{dr}{dt} = 4t \Rightarrow r - r_0 = \int_0^t 4t\,dt$

$$\boxed{\vec{r}(t) = 2t^2\,\hat{r}}$$

$$\dot{\theta} = 2t^2 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 2t^2 \Rightarrow \theta - \theta_0 = \frac{2}{3}t^3$$

$$\theta(t) = \left(\theta_0 + \frac{2}{3}t^3\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}t^3$$

$$\boxed{\vec{\theta}(t) = \frac{1}{3}(\pi + 2t^3)\,\hat{\theta}}$$

b) $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

$$\boxed{\vec{v}(t) = 4t\,\hat{r} + 4t^4\,\hat{\theta}}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 4 - 8t^6$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2t^2 \cdot 4t + 2\,4t \cdot 2t^2$$

$$= 8t^3 + 16t^3 = 24t^3$$

→

02

$$\vec{a}(t) = (4 - 8t^6)\,\hat{r} + 24t^3\,\hat{\theta}$$

#02. a) $v_y^2 = v_{oy}^2 - 2g\Delta y = v_{oy}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$y_f = y_m \Rightarrow v_y = 0$:

$$v_{oy}^2 = 2g y_m \Rightarrow y_m = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}, \quad \theta = 45^\circ$$

$$\boxed{y_m = \frac{v_o^2}{4g}}$$

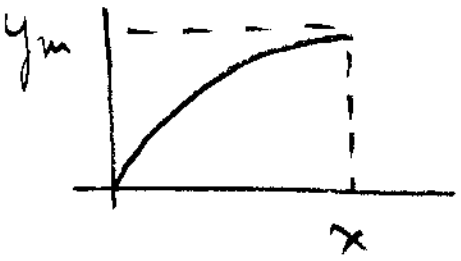
b) $\vec{v} = v_{ox}\hat{x} + v_y\hat{y} = v_o\cos\theta\,\hat{x} = \frac{v_o\sqrt{2}}{2}\hat{x}$ ($v_y = 0$)

$$\boxed{\vec{v} = \frac{v_o}{2}\sqrt{2}\,\hat{x}}$$

c) $\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{v}$, $\vec{v} = \frac{v_o}{2}\sqrt{2}\,\hat{x}$

$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$

$y = y_m$



$$\vec{H} = m \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}\cdot 0 + \hat{y}\cdot 0 - \hat{z}\, y v_x$$

($v_y \to 0$)

$\vec{H} = -\hat{z}\, m y v_x$ calculado na altura máxima!

$$H = m \frac{v_0^2}{4g} \frac{v_0\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{H = \frac{m v_0^3 \sqrt{2}}{8g}}$$

#03. a) $F = 9/x^2 = 9/3^2 = 1\,N$

$$\boxed{F(x=3) = 1\,N}$$

b) $$W = \int_1^3 F\,dx = 9\int_1^3 x^{-2}\,dx = 9\,\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^3$$

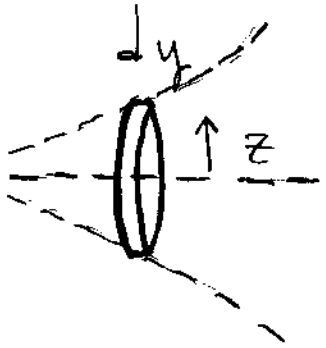
$$W = 9\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) = 9 \cdot 2/3 \Rightarrow \boxed{W = 6\,J}$$

c) $\Delta K = W$

$K_f - K_i = W \Rightarrow \boxed{K = 6\,J}$ ($K_i \to 0$)

04

#04.



$$dV = \pi z^2 dy$$

$$z = y^2/4 \Rightarrow z^4 = \frac{y^8}{4^4}$$

$$I = \int \frac{dm\, z^2}{2} = \frac{1}{2}\int \rho\, dV\, z^2 = \frac{1}{2}\rho \int \pi z^4 dy$$

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi \int_0^2 \frac{y^8}{256} dy = \frac{\rho\pi}{2} \cdot \frac{2^9}{9} \cdot \frac{1}{256}$$

$$I = \rho\pi \cdot \frac{2^{\cancel{8}}}{9} \frac{1}{2^{\cancel{8}}} \Rightarrow \frac{\rho\pi}{9}$$

$$\boxed{I = \pi/9 \ kg\,m^2}$$