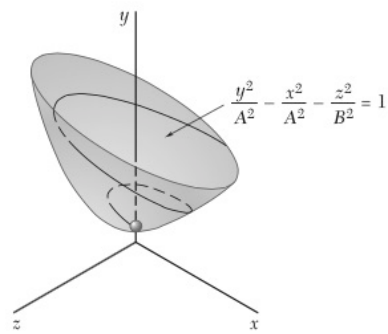
Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
Mecânica 2 – 2° Semestre 2014 – Exame Final
Turma GG

Nome:____

ATENÇÃO:
Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI).
Nos problemas de resolução numérica considere g = 10 m/s^2.

01. (3,0 pontos) O movimento tridimensional de uma partícula é descrito pelo vetor posição

$$\vec{r}(t) = [Atcos(t)]\hat{x} + \left[A\sqrt{t^2+1}\right]\hat{y} + [Btsen(t)]\hat{z},$$



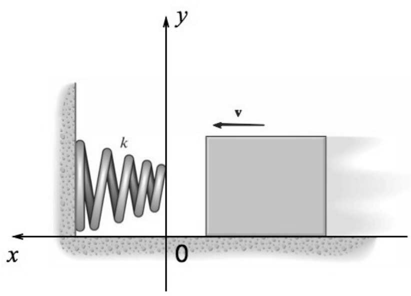
onde A e B são constantes e a posição e o tempo estão expressos em metros e segundos, respectivamente.

a) (1,0) Mostre que a curva descrita pela partícula está em um hiperbolóide de equação $(y/A)^2 - (x/A)^2 - (z/B)^2 = 1$.

b) (2,0) Para $A = 3$, $B = 1$ e $t = 0$ determine os módulos da velocidade e da aceleração da partícula.

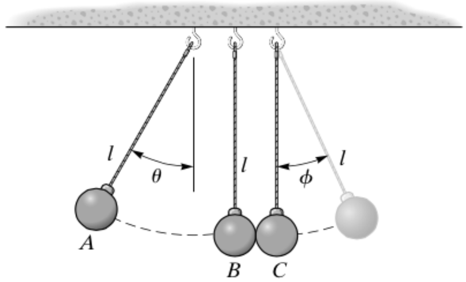
02. (3,0 pontos) Um bloco de massa m desliza em uma superfície plana horizontal sem atrito com uma velocidade cujo módulo é igual a $v_0 \neq 0$. O bloco entra em contato com uma mola ideal onde a força elástica que ela produz tem módulo igual a $F = kx$. Nessa equação, x denota a deformação da mola e k é a sua constante elástica. Responda os itens a seguir para a região $x > 0$ sabendo que a gravidade local tem módulo constate g que aponta verticalmente para baixo.

a) (1,0) Esboce as forças que atuam sobre o bloco a partir de um diagrama de corpo isolado e escreva as equações de movimento do bloco utilizando a Segunda Lei de Newton.
b) (0,5) Escreva uma relação para a aceleração do bloco em função de x.
c) (1,0) Determine a velocidade do bloco em função de x.
d) (0,5) Calcule a deformação máxima sofrida pela mola.



03. (4,0 pontos) As três esferas mostradas na figura abaixo possuem massas idênticas e iguais a m e a gravidade local tem módulo g, constante, que aponta verticalmente para baixo. Se a esfera A é abandonada do repouso de um ângulo θ e o coeficiente de restituição entre as colisões é igual a e, determine:

a) (1,0) o módulo da velocidade com que A colide com B;
b) (1,0) o módulo da velocidade da esfera B imediatamente após a colisão com A;
c) (1,0) o módulo da velocidade da esfera C imediatamente após a colisão com B;
d) (1,0) o ângulo máximo ϕ alcançado por C após a colisão com B.



Mecânica 2 - Turma GG

Exame Final

2014.2

Resolução

#01. $\vec{r}(t) = At\cos t\,\hat{x} + A\sqrt{t^2+1}\,\hat{y} + Bt\,\mathrm{sen}\,t\,\hat{z}$

a) $x(t) = At\cos t$, $y(t) = A\sqrt{t^2+1}$, $z(t) = Bt\,\mathrm{sen}\,t$

$x^2 = A^2t^2\cos^2 t$, $z^2 = B^2t^2\mathrm{sen}^2 t$

$$\frac{y^2}{A^2} = t^2+1, \quad \frac{x^2}{A^2} = t^2\cos^2 t, \quad \frac{z^2}{B^2} = t^2\mathrm{sen}^2 t$$

$$\frac{y^2}{A^2} - \frac{x^2}{A^2} - \frac{z^2}{B^2} = t^2+1 - (t^2\cos^2 t + t^2\mathrm{sen}^2 t)$$

$$\boxed{\frac{y^2}{A^2} - \frac{x^2}{B^2} - \frac{z^2}{B^2} = 1}$$

b) $A = 3$, $B = 1$: $\vec{r}(t) = 3t\cos t\,\hat{x} + 3\sqrt{t^2+1}\,\hat{y} + t\,\mathrm{sen}\,t\,\hat{z}$

$$\vec{v}(t) = \hat{x}(3\cos t - 3t\,\mathrm{sen}\,t) + \hat{y}\left(\frac{3t}{\sqrt{t^2+1}}\right)$$

$$+\hat{z}(\mathrm{sen}\,t + t\cos t)$$

$$\vec{v}(0) = \hat{x}(3) + \hat{y}(0) + \hat{z}(0)$$

$\rightarrow$

02

$$\boxed{|\vec{v}(0)| = 3\,m/s}$$

$$\vec{a}(t) = \hat{x}\,(-3\,\text{sen}\,t - 3t\cos t - 3\,\text{sen}\,t) +$$

$$+\hat{y}\left[\frac{3}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{3t}{(t^2+1)^{-3/2}}\right] +$$

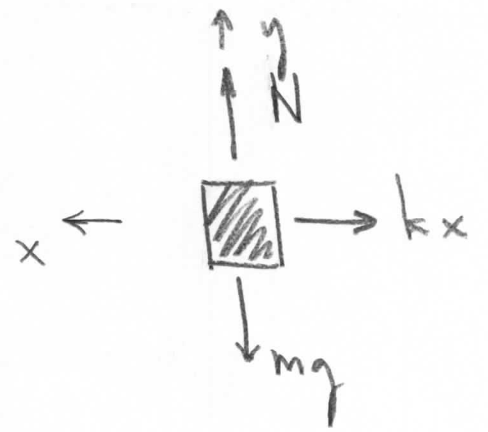
$$+\hat{z}\,(\cos t - t\,\text{sen}\,t + \cos t)$$

$$\vec{a}(0) = \hat{x}(0) + \hat{y}(3-0) + \hat{z}(2)$$

$$|\vec{a}(0)| = \sqrt{9+4} \Rightarrow \boxed{|\vec{a}(0)| = \sqrt{13}\,m/s^2}$$

#02.

1)



$\hat{x}:\ -kx = ma$

$\hat{y}:\ N - mg = 0$

b) $$\boxed{a = -\frac{k}{m}x}$$

c) $$a = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = -\frac{k}{2m}x^2$$

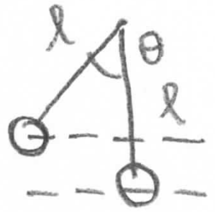
$\longrightarrow$

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}x^2} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(x) = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}x^2}\;\hat{x}}$$

d) $V = 0 \Rightarrow x = x_{máx}$.

$$v_0^2 - \frac{k}{m}x_m^2 \Rightarrow \boxed{x_m = v_0\sqrt{m/k}}$$

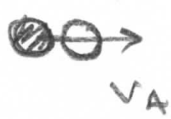
#03. a)



$h_A = l - l\cos\theta$

$$\cancel{m_A}\, g\, h_A = \cancel{m_A}\, v_A^2/2 \Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}}$$

b)



$\cancel{m_A} v_A = \cancel{m_A} v_A' + \cancel{m_B} v_B'$, $m_A = m_B$

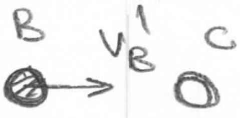
$v_A = v_A' + v_B'$ (I)

$$e = \frac{v_B' - v_A'}{v_A} \Rightarrow e v_A = v_B' - v_A' \quad (II)$$

(I) + (II): $(e+1)v_A = 2v_B'$

$$\boxed{v_B' = \frac{(e+1)}{2}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}}$$

04

c) 

$$m_B v_B' = m_B v_B'' + m_C v_C''$$

$$v_B' = v_B'' + v_C'' \quad (\text{III})$$

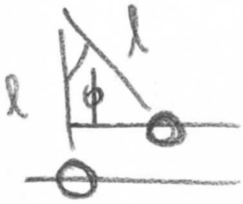
$$e v_B' = v_C'' - v_B'' \quad (\text{IV})$$

(IV) + (III): $(e+1) v_B' = 2 v_C''$

$$\boxed{v_C'' = \frac{(e+1)^2}{4}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}}$$

d) $\cancel{m_C} g h_C = \dfrac{\cancel{m_C} v_C''^2}{2}$

$$h_C = \frac{v_C''^2}{2g} = \frac{(e+1)^4}{16}\,\frac{[2\cancel{g}\,l(1-\cos\theta)]}{2\cancel{g}}$$



$$h_C = l(1-\cos\phi)$$

$$\cancel{l}(1-\cos\phi) = \frac{(e+1)^4}{16}\cancel{l}(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{\phi = \arccos\left[1 - \frac{(e+1)^4}{16}(1-\cos\theta)\right]}$$