Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
Mecânica 2 – 1° Semestre 2015 – Exame Final

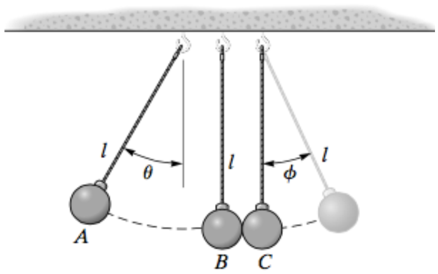
Nome:____

ATENÇÃO:
Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI). Nos problemas de resolução numérica considere g = 10 m/s^2.

01. (3,0 pontos) Uma partícula se move ao longo de um eixo x com sua velocidade dada pela relação $v = -4x^2$, onde x é dado em metros e a velocidade em metros por segundo. Quando $t = 0$, a posição da partícula vale $x = 2\ m$. Determine em função do tempo:

a) (1,0) a posição da partícula;
b) (1,0) a velocidade da partícula;
c) (1,0) a aceleração da partícula.

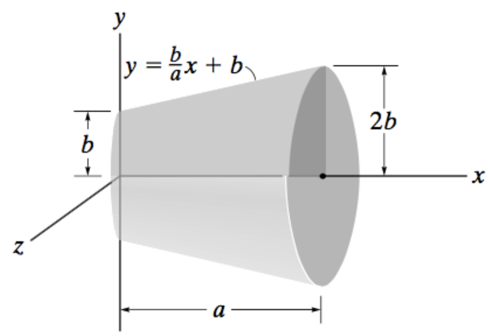
02. (4,0 pontos) Três bolas idênticas estão presas à fios ideiais no teto de um laboratório como mostrado na figura. A aceleração da gravidade local que vale g e aponta verticalmente para baixo. Se a bola A é abandonada do repouso de um ângulo θ e todas as colisões possuem um coeficiente de restituição e, determine:



a) (1,0) a velocidade com que a bola A atinge a bola B;
b) (1,0) a velocidade de B imediatamente após a colisão com A;
c) (1,0) a velocidade de C imediatamente após a colisão com B;
d) (1,0) o ângulo ϕ de inclinação atingido pelo cabo que está conectado à bola C.

03. (3,0 pontos) A seção de cone da figura é formado pelo sólido de revolução completa da curva $y = bx/a + b$ em torno do eixo x. Supondo que este sólido possui uma densidade volumétrica de massa constante e igual a ρ, calcule:

a) (1,5) a massa total deste corpo;
b) (1,5) seu o momento de inércia do objeto em torno do eixo x em função de sua massa.



MECÂNICA 2 – TURMA GG

EXAME FINAL

2015.1

RESOLUÇÃO

#01. a) $v = -4x^2$

$$\frac{dx}{dt} = -4x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = -4\,dt$$

$$\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{x_0}^{x} = -4t \quad , \quad x_0 = 2m :$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = -4t \rightarrow \frac{1}{2} + 4t = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1+8t}{2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{2}{1+8t}}$$

b) $v = -4x^2$

$$v = -4\left(\frac{2}{1+8t}\right)^2 \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{-16}{(1+8t)^2}}$$

c) $a = \dfrac{dv}{dt} = -16\dfrac{d}{dt}(1+8t)^{-2}$

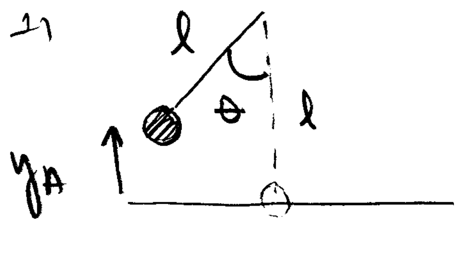
→

02

$$a = -16 \cdot (-2)(1+8t)^{-3} \cdot (8)$$

$$\boxed{a(t) = \frac{256}{(1+8t)^3}}$$

#02. 1)



$U_g = 0$

$$\cancel{m}gy_A = \cancel{m}v_A^2/2$$

$$v_A^2 = 2gy_A$$

$$y_A = l - l\cos\theta \Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}}$$

b) $\cancel{m}_A v_A = \cancel{m}_A v_A' + \cancel{m}_B v_B' \Rightarrow v_A = v_A' + v_B'$

$$e = \frac{v_B' - v_A'}{v_A} \Rightarrow ev_A = v_B' - v_A'$$

$\therefore$

$$(e+1)v_A = 2v_B' \Rightarrow \boxed{v_B' = \frac{\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}\,(1+e)}{2}}$$

c) $m_B v_B' = m_B v_B'' + m_C v_C' \Rightarrow v_B' = v_B'' + v_C'$

$$e = \frac{v_C' - v_B''}{v_B'} \Rightarrow ev_B' = v_C' - v_B''$$

$\rightarrow$

$$(1+e)\,v_B' = 2v_c' \Rightarrow v_c' = \frac{v_B'}{2}(1+e)$$

$$\boxed{v_c' = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}\;\frac{(1+e)^2}{4}}$$

d) $\frac{\cancel{m}v_c'^2}{2} = \cancel{m}gy_c \;,\; y_c = l - l\cos\phi$

$$l(1-\cos\phi) = \frac{v_c'^2}{2g} \Rightarrow 1-\cos\phi = \frac{v_c'^2}{2gl}$$

$$\cos\phi = 1 - v_c'^2/2gl$$

$$\boxed{\phi = \arccos\left[1 - \frac{(1-\cos\theta)(1+e)^4}{16}\right]}$$

#03. a) $M = \int dm \;,\; dm = \rho dV = \rho A dx$

$$A = \pi y^2 \Rightarrow dm = \rho\pi y^2 dx$$

$\longrightarrow$

04

$$M = \int \rho \pi y^2 dx \quad , \quad y^2 = \left(\frac{b}{a}x + b\right)^2$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{2b^2}{a}x + b^2$$

$$M = \rho\pi \int_0^a \left(\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{2b^2x}{a} + b^2\right) dx$$

$$M = \rho\pi \left(\frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3} + \frac{2b^2}{a}\frac{a^2}{2} + b^2a\right)$$

$$M = \rho\pi b^2 a \left(\frac{1}{3} + 1 + 1\right) \Rightarrow \boxed{M = \frac{7}{3}\rho\pi b^2 a}$$

b) $$I_x = \int dI_x \quad , \quad dI_x = \frac{y^2 dm}{2}$$

$$I_x = \int \frac{y^2 \rho\pi y^2 dx}{2} = \rho\frac{\pi}{2}\int_0^a y^4 dx$$

$$I_x = \rho\frac{\pi}{2}\int_0^a \left(\frac{b}{a}x + b\right)^4 dx$$

$$\left(\frac{b}{a}x + b\right)^4 = \left(\frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{2b^2x}{a} + b^2\right)^2$$

$\rightarrow$

$$\left(\frac{b}{a}x+b\right)^4 = \frac{b^4x^4}{a^4} + \frac{2b^4x^3}{a^3} + \frac{b^4x^2}{a^2} + \frac{2b^4x^3}{a^3} + \frac{4b^4x^2}{a^2} + \frac{2b^4x}{a} + \frac{b^4x^2}{a^2} + \frac{2b^4x}{a} + b^4$$

$$= \frac{b^4x^4}{a^4} + \frac{4b^4x^3}{a^3} + \frac{6b^4x^2}{a^2} + \frac{4b^4x}{a} + b^4$$

$$\therefore I_x = \rho\frac{\pi}{2}\left(\frac{b^4a^5}{5a^4} + \frac{4b^4a^4}{4a^3} + \frac{6b^4a^3}{3a^2} + \frac{4b^4a^2}{2a} + b^4a\right)$$

$$I_x = \rho\frac{\pi}{2}b^4a\left(\frac{1}{5} + 1 + 2 + 2 + 1\right)$$

$$I_x = \rho\pi\frac{b^4a}{2}\left(\frac{31}{5}\right) = \frac{31\rho\pi b^4a}{10}$$

Mas $\frac{3M}{7} = \rho\pi b^2a$, então $\boxed{I_x = \frac{93}{70}Mb^2}$